Marcin Kurczab
Elżbieta Kurczab
Elżbieta Świda

1

MATEMATYKA

Zbiór zadań do liceów i techników

ZAKRES ROZSZERZONY

OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Projekt graficzny, rysunki, skład i łamanie
Eryk Krawczyński

Redaktor
Tomasz Szwed

Fotografia na okładce: *Funkcje kwadratowe są dookoła nas*
Autor: Michał Cenzartowicz
Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny „Matematyka w obiektywie"
www.mwo.usz.edu.pl

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *UPM Ultra matt* 65 g
www.antalis.pl

Wydanie II, Warszawa 2021 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościańska 4, 01-695 Warszawa
pazdro@pazdro.com.pl
www.pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-180-7

Spis treści

Symbolem *D* zostały oznaczone zadania na dowodzenie.

1. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste

Zbiór. Działania na zbiorach

1.1. Wypisz elementy zbioru:
A – zbiór naturalnych dzielników liczby 10
B – zbiór kwadratów liczb: 0, 1, –3, $\sqrt{13}$, 8, –11
C – zbiór liczb przeciwnych do liczb należących do zbioru $\{-5, \sqrt{2}, 0, 1, \pi\}$
D – zbiór odwrotności liczb należących do zbioru $\left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, \sqrt{7}, \frac{4}{13}\right\}$

1.2. Wypisz elementy zbioru opisanego w następujący sposób:
A – zbiór liczb mających postać $3n$, gdzie $n \in \{0, 1, 2, 4\}$
B – zbiór liczb mających postać $5k$, gdzie $k \in \{...-2, -1, 0, 1\}$
C – zbiór liczb mających postać $a\sqrt{8} + \sqrt{2}$, gdzie $a \in \left\{-4, -1, \frac{-1}{2}, \sqrt{2}, 7\right\}$
D – zbiór liczb mających postać $k\pi - \pi^2$, gdzie $k \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...\}$

1.3. Zapisz symbolicznie zbiory opisane w następujący sposób:
A – zbiór naturalnych wielokrotności liczby 3
B – zbiór liczb, których kwadrat wynosi 16
C – zbiór odwrotności naturalnych wielokrotności liczby 5
D – zbiór liczb rzeczywistych, których trzecia potęga zmniejszona o 5 jest większa od 22
E – zbiór potęg liczby 7 o wykładniku naturalnym
F – zbiór liczb rzeczywistych, których odwrotność jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$
G – zbiór liczb rzeczywistych spełniających następujący warunek: suma każdej liczby i jej kwadratu jest nie większa od 4.

1.4. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru:
a) $A = \{a\}$ b) $B = \{a, b\}$ c) $C = \{a, b, c\}$

1.5. Wyznacz sumę zbiorów A i B, a następnie część wspólną zbiorów A i B, jeśli:
a) $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A = \{4, 5\}$, $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$
c) $A = \{0, 3, 6, 9, ..., 30\}$, $B = \{0, 6, 12, ..., 30\}$
d) $A = \{2, 4, 6, ..., 20\}$, $B = \{1, 3, 5, ..., 19\}$

1.6. Wyznacz różnicę zbiorów $A - B$, a następnie $B - A$, jeśli:

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

b) $A = \{0, 5, 10\}$, $B = \{0, 2, 3, 5, 7\}$

c) $A = \{0, 6, 12, 18\}$, $B = \{0, 3, 6, ..., 21\}$

d) $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$, $B = \{0, 4, 8, 12, ...\}$

1.7. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, jeśli:

a) $A = \{6, 5, 4, 3, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

b) $A = \{10, 20, 30, ..., 90\}$, $B = \{5, 10, 15, ..., 95\}$

c) $A = \{1, 3, 5, ..., 99\}$, $B = \{2, 4, ..., 100\}$

d) A – zbiór cyfr, $B = \{0, 5, 10, 15\}$

1.8. Dane są zbiory $A = \{x\colon x = 2n \text{ i } n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, $B = \{x\colon x = 3m \text{ i } m \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

1.9. Dane są zbiory $A = \{x\colon x = 2k + 1 \text{ i } k \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}\}$, $B = \{x\colon x = 3n - 2 \text{ i } n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

1.10. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

T – zbiór wszystkich trójkątów
R – zbiór trójkątów równoramiennych
B – zbiór trójkątów równobocznych
P – zbiór trójkątów prostokątnych.

Które z poniższych zdań są prawdziwe?

a) $R \cup B = R$ b) $B \cap P = \varnothing$ c) $R \cap P \neq \varnothing$

d) $T \cap P = P$ e) $R \subset B$ f) $R \cap B = B$

1.11. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

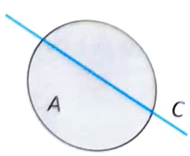
T – zbiór trapezów P – zbiór prostokątów
R – zbiór równoległoboków K – zbiór kwadratów.

Które z poniższych zdań są fałszywe?

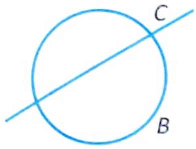
a) $K \cap T = K$ b) $K \cup P = P$ c) $P - R = P$

d) $R - T = \varnothing$ e) $K \subset R$ f) $T \subset P$

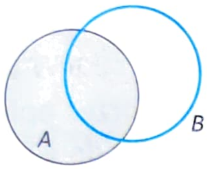
1.12. Na poniższych rysunkach przedstawione są figury geometryczne i relacje zachodzące między nimi, gdzie: A – koło, B – okrąg, C – prosta, D – trójkąt. Na osobnych rysunkach przedstaw zbiory zapisane po prawej stronie.

a) 

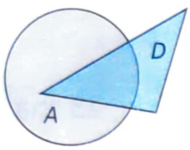
$A \cup C$, $A \cap C$, $A - C$, $C - A$

b) 

$B \cup C$, $B \cap C$, $B - C$, $C - B$

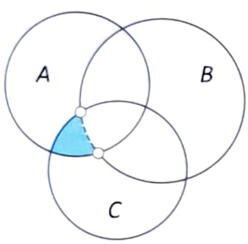
c) 

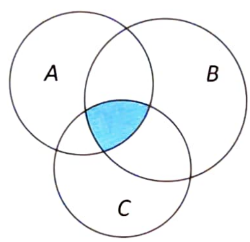
$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$

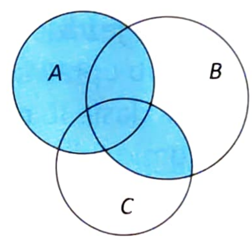
d) 

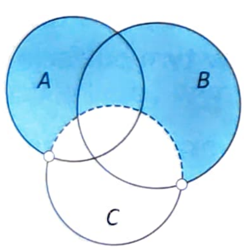
$A \cup D$, $A \cap D$, $A - D$, $D - A$

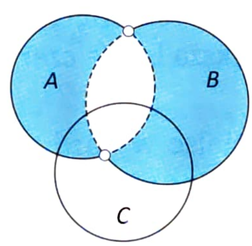
1.13. Na zbiorach A, B oraz C (A, B, C – koła) wykonano pewne działania i otrzymano zacieniowany zbiór. Używając symboli: $\cap$, $\cup$, $-$ oraz A, B, C, zapisz te działania.

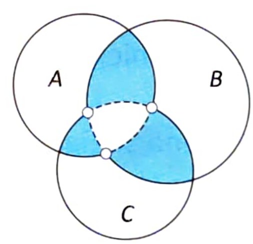
a) 

b) 

c) 

d) 

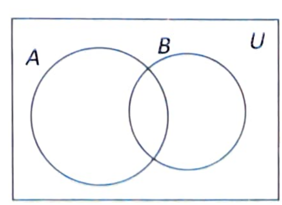
e) 

f) 

1.14. Niech zbiór $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ będzie przestrzenią. Wyznacz zbiory: A', B', $A' \cup B'$, $(A \cup B)'$, $A' \cap B'$, $(A \cap B)'$, jeśli $A \subset U$, $B \subset U$ oraz:

a) A – zbiór naturalnych dzielników liczby 8, B – zbiór naturalnych dzielników liczby 6
b) A – zbiór liczb mniejszych od 5, B – zbiór liczb nie większych niż 7
c) A – zbiór kwadratów takich liczb z przestrzeni U, które są nie większe od 3, B – zbiór liczb pierwszych

1.15. Dana jest przestrzeń U oraz zbiory A i B (A, B – koła) zawarte w tej przestrzeni, jak na rysunku obok.



Na osobnych rysunkach zaznacz zbiory:

a) $(A \cup B)'$ b) $A' \cap B$
c) $B' \cup (A \cap B)$ d) $A' \cup B'$

1.16. Zbiór A ma 11 elementów, zbiór B ma 10 elementów, zaś suma $A \cup B$ jest zbiorem 14-elementowym. Ile elementów należy do zbioru $A \cap B$?

1.17. Do sumy zbiorów A i B należy 9 elementów, do części wspólnej A i B należą 4 elementy, natomiast zbiór $B - A$ ma 3 elementy. Po ile elementów mają zbiory A i B?

1.18. Na parkingu mającym 35 miejsc wszystkie miejsca są zajęte przez ople lub przez niebieskie samochody. Wiedząc, że jest tam 15 opli i 27 samochodów niebieskich, oblicz, ile niebieskich opli stoi na tym parkingu.

1.19. W klasie Ia jest 36 uczniów, wśród których: 26 zna język angielski, 23 zna język francuski i 24 zna język rosyjski. Czy w klasie Ia jest uczeń, który zna wszystkie trzy języki?

1.20. W klasie Ib jest 34 uczniów, wśród których: 24 umie jeździć na rowerze, 16 umie pływać, 10 umie jeździć na nartach; w tej liczbie 12 umie pływać i jeździć na rowerze, 5 umie jeździć na rowerze i na nartach, 3 umie pływać i jeździć na nartach. Dwie osoby w Ib uprawiają wszystkie wymienione dyscypliny sportowe.

a) Ile osób w klasie Ib nie uprawia żadnej dyscypliny sportowej?
b) Ile osób umie tylko jeździć na rowerze?
c) Ile osób umie tylko pływać i jeździć na nartach?

1.21. Mama dostała od taty bukiet złożony z 15 kwiatów. Alek obliczył, że jest w nim 7 kwiatów czerwonych, a Karolina stwierdziła, że w bukiecie jest 9 róż. Jaka może być najmniejsza, a jaka największa liczba czerwonych róż w tym bukiecie?

1.22. Do kina mającego po 20 miejsc w każdym rzędzie wybrali się uczniowie z dwóch klas: Ia i Ib. Zajęli oni wszystkie miejsca w trzech kolejnych rzędach. Wiadomo, że w ostatnim z tych rzędów usiadło 14 uczniów z klasy Ia i 11 dziewcząt. Jaka może być największa, a jaka najmniejsza liczba chłopców z klasy Ia zajmujących miejsca w ostatnim rzędzie?

Zbiory liczbowe

1.23. Ustal, które z poniższych wypowiedzi są prawdziwe, a które fałszywe. Odpowiedź uzasadnij.

a) Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.
b) Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną.
c) Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.
d) Istnieje liczba wymierna, która jest liczbą całkowitą.
e) Istnieje liczba rzeczywista ujemna, która jest liczbą niewymierną.
f) Istnieje liczba wymierna, która nie jest liczbą całkowitą.

1.24. Wypisz elementy zbioru A, jeśli:

a) $A = \{x: x \in \boldsymbol{N} \text{ i } x < 5\}$
b) $A = \{x: x \in \boldsymbol{N}_+ \text{ i } x \leq 7\}$
c) $A = \{x: x \in \boldsymbol{Z} \text{ i } x \geq -3\}$
d) $A = \{x: x \in \boldsymbol{Z}_- \text{ i } x > -8\}$
e) $A = \{x: x \in \boldsymbol{Z} \text{ i } x < -1{,}5\}$
f) $A = \{x: x \in \boldsymbol{Z} \text{ i } -2 \leq x < 3\}$

1.25. Wypisz elementy zbioru A, jeśli:

a) $A = \left\{x: x = \frac{1}{n} \text{ i } n \in \boldsymbol{N}_+\right\}$
b) $A = \{x: x = 2^n \text{ i } n \in \boldsymbol{N}_+\}$
c) $A = \{x: x = 4k \text{ i } k \in \boldsymbol{Z}\}$
d) $A = \{x: x = 3k \text{ i } k \in \boldsymbol{Z}_-\}$
e) $A = \{x: x = n^2 \text{ i } n \in \boldsymbol{N}\}$
f) $A = \{x: x = k^3 \text{ i } k \in \boldsymbol{Z}_+\}$

1.26. Podaj rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $4\frac{2}{7}$ d) $\frac{22}{9}$ e) $\frac{31}{8}$ f) $\frac{13}{11}$

1.27. Ułamek okresowy zamień na nieskracalny ułamek zwykły:

a) 0,(6) b) 0,(36) c) 0,4(6) d) 0,1(2) e) 0,(023) f) 0,1(28)

1.28. Zapisz daną liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

a) 0,(270) b) 0,6(12) c) –2,(7) d) –7,2(45) e) 5,4(9) f) –1,0(405)

1.29. Ze zbioru $A = \left\{-14{,}2; -\frac{12{,}6}{4{,}8}; -0{,}(37); -\frac{1}{6}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{12{,}25}; 15\frac{1}{3}\right\}$ wybierz wszystkie liczby wymierne.

1.30. Ze zbioru $B = \left\{-0{,}(123); -\sqrt{25{,}2}; -\sqrt{\frac{16}{25}}; \frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt[3]{8}; \sqrt[4]{5}; 2\pi\right\}$ wybierz wszystkie liczby niewymierne.

1.31. Zaznacz na osi liczbowej podane liczby wymierne: $\frac{3}{2}$; 1,7; $1\frac{3}{7}$; $\frac{7}{4}$; $1\frac{4}{5}$; 1,4; $1\frac{2}{3}$.

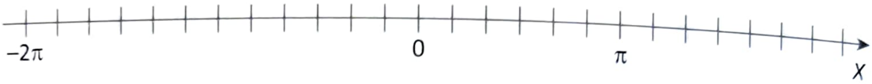
a) Wskaż możliwie dokładnie, między którymi dwiema liczbami spośród danych liczb znajduje się na osi liczbowej $\sqrt{2}$ oraz między którymi dwiema danymi liczbami znajduje się na osi liczbowej liczba $\sqrt{3}$.

b) Na podstawie rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$ sprawdź, czy liczba $1 - \sqrt{2}$ leży na osi liczbowej pomiędzy liczbami –0,5 oraz –0,4.

1.32. Wskaż na podanej osi liczbowej następujące liczby niewymierne:

a) $2{,}5\sqrt{2}$ $\quad -\sqrt{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{1}{4}\sqrt{2}$ $\quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad -\frac{5}{4}\sqrt{2}$

b) 2π $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad -\frac{\pi}{3}$ $\quad -\frac{3}{2}\pi$ $\quad \frac{5\pi}{6}$ $\quad -\frac{11}{6}\pi$ $\quad \frac{4\pi}{3}$



1.33. Podaj przykład liczby wymiernej oraz liczby niewymiernej – które znajdują się na osi liczbowej między liczbami:

a) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ $\quad$ b) $\sqrt{5}$ i π $\quad$ c) $-\sqrt{5}$ i -2 $\quad$ d) -3 i $-\sqrt{7}$

1.34. Podaj przykład liczby wymiernej, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami:

a) $\frac{1}{9}$ i $\frac{2}{9}$ $\quad$ b) $-1\frac{7}{13}$ i $-1\frac{6}{13}$ $\quad$ c) $-0{,}0004$ i $-0{,}0003$

1.35. Zaznacz na osi liczbowej podany zbiór. Następnie podaj przykład liczby wymiernej oraz przykład liczby niewymiernej – które należą do danego zbioru.

a) $A = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 3\}$
b) $B = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x \le 0{,}5\}$
c) $C = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x < -1{,}3\}$
d) $D = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x \ge 7{,}25\}$
e) $E = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x \le -10\}$
f) $F = \{x\colon x \in \mathbf{R} \text{ i } x > 20\}$

1.36. Oblicz:

a) $|0 - 2{,}5|$ $\quad$ b) $\left|3\frac{2}{7} - 4\frac{1}{7}\right|$ $\quad$ c) $\left|\frac{3}{2} - 1{,}(2)\right|$ $\quad$ d) $\left|3{,}(20) - \frac{317}{99}\right|$

e) $|\sqrt{2} - 3|$ $\quad$ f) $|1 - \sqrt{2}|$ $\quad$ g) $|\sqrt{7} - 2|$ $\quad$ h) $|2\pi - 8|$

1.37. Oblicz wartość wyrażenia. Oceń, jaką liczbą – wymierną czy niewymierną – jest wynik obliczeń.

a) $|3 - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} + 1{,}3|$
b) $2 \cdot |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2\sqrt{2}|$
c) $|3 - \pi| - |\pi - 3|$
d) $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$
e) $|\sqrt{2} - 4| + |\sqrt{2} - 1{,}4|$
f) $|1 - \sqrt{2}| \cdot |-\sqrt{2}|$
g) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}|$
h) $3|1 - \sqrt{6}| - 3\sqrt{6}$

Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

1.38. Wykonaj działania, stosując prawo łączności dodawania:

a) $124 + 236 + 64 + 126$

b) $14{,}2 + 5{,}8 + 52{,}7 + 147{,}3$

c) $3\frac{4}{7} + 5\frac{6}{7} + 2\frac{2}{5} + 13{,}6$

d) $5{,}125 + \frac{7}{8} + 11\frac{3}{4} + 6{,}75$

1.39. Wykonaj działania, stosując prawo łączności mnożenia:

a) $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot 1{,}8$

b) $14{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot \frac{5}{18}$

c) $3\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{29} \cdot 0{,}5 \cdot 2$

d) $15 \cdot 1\frac{5}{6} \cdot 0{,}4 \cdot 10$

1.40. Wykonaj działania, stosując prawo przemienności i łączności dodawania:

a) $(-3{,}4) + 6\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} + (-0{,}6) + \left(-\frac{1}{3}\right) + (-0{,}75)$

b) $2{,}75 + \left(-1\frac{3}{7}\right) + 4{,}2 + \left(-\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{4} + (-1{,}2)$

c) $(-\sqrt{2}) + 6{,}021 + 4\frac{1}{6} + 0{,}979 + \left(-\frac{1}{6}\right) + \sqrt{2}$

d) $-3\frac{1}{3} + 5{,}27 + 1\frac{1}{3} + 1{,}24 - 0{,}04 + 2{,}73$

1.41. Wykonaj działania, stosując prawo przemienności i łączności mnożenia:

a) $\left(-1\frac{3}{4}\right) \cdot (-2{,}5) \cdot 3\frac{5}{6} \cdot (-6) \cdot \frac{4}{7} \cdot 2$

b) $0{,}375 \cdot 4 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot (-0{,}25) \cdot (-8)$

c) $\frac{1}{21} \cdot \frac{25}{7} \cdot 0{,}7 \cdot \frac{1}{3{,}5} \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{42}{5}\right)$

d) $3{,}6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot 4 \cdot 0{,}25$

1.42. Oblicz w pamięci, stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

a) $12 \cdot 502$

b) $13 \cdot 400$

c) $9 \cdot 105$

d) $6 \cdot 203$

1.43. Oblicz, stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

a) $0{,}375 \cdot 5 + 0{,}375 \cdot 13 + 0{,}375 \cdot 82$

b) $\frac{3}{7} \cdot 0{,}13 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}13 + 1\frac{2}{7} \cdot 0{,}13 - \frac{6}{7} \cdot 0{,}13$

c) $0{,}14 \cdot 0{,}21 + 0{,}21 \cdot 0{,}36 + 0{,}5 \cdot 0{,}21 + 99 \cdot 0{,}21$

d) $1{,}042 \cdot 1{,}6 + 0{,}314 \cdot 1{,}6 + 3{,}413 \cdot 1{,}6 + 0{,}231 \cdot 1{,}6$

1.44. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $6 + 3\sqrt{5}$

b) $12 - 4\sqrt{3}$

c) $8\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 24$

d) $6\sqrt{5} + 36\sqrt{7} - 12$

e) $4 - 8\sqrt{2}$

f) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2$

g) $-7 + 14\pi$

h) $-2\pi - \pi 4\sqrt{5}$

1.45. Skróć ułamki:

a) $\frac{2 - 4\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{3 - 12\sqrt{5}}{-6}$

c) $\frac{-24 + 8\sqrt{2}}{-8}$

d) $\frac{-6 + 12\sqrt{3}}{24}$

e) $-\frac{3 - 6\sqrt{3}}{3}$

f) $-\frac{4 + 20\sqrt{2}}{4}$

g) $\frac{-4 - 12\pi}{12\pi + 4}$

h) $\frac{\pi - \pi^2}{1 - \pi}$

i) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 6}$

1.46. Wyłącz ułamek przed nawias według wzoru:

$\frac{1}{2}\sqrt{5} - 3 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 6\right)$

a) $5 + \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{1}{3} - \sqrt{2}$

c) $\pi - \frac{1}{5}$

d) $-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{1}{5} - 5\sqrt{5}$

f) $-\frac{3}{2} - 2\pi$

g) $\frac{2}{-\pi} + \sqrt{3}$

h) $\frac{1}{\sqrt{3}} - 3$

i) $\sqrt{2} + \frac{3}{2\pi}$

1.47. Podaj najpierw liczbę przeciwną do danej liczby, a potem liczbę będącą odwrotnością danej liczby.

a) 5 b) $0,(5)$ c) -1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\pi + 2$ f) $\frac{4 + \sqrt{32}}{4}$

1.48. Podaj przykład liczby, która jest mniejsza zarówno od liczby do niej przeciwnej, jak i od swojej odwrotności.

1.49. Podaj przykład dwóch liczb wymiernych x, y, które spełniają nierówność:

a) $\frac{3}{5} < x < y < \frac{4}{5}$ b) $-3\frac{1}{8} < x < y < -3\frac{1}{9}$ c) $0{,}3 < x < y < 0{,}31$

1.50. Podaj przykład dwóch liczb całkowitych a i b, dla których spełniona jest nierówność:

a) $\frac{7}{15} < \frac{a}{b} < \frac{8}{15}$ b) $\frac{13}{14} < \frac{a}{b} < \frac{27}{28}$ c) $\frac{-3}{19} < \frac{a}{b} < \frac{-2}{19}$

1.51. Podaj przykład dwóch liczb: wymiernej x oraz niewymiernej y, które spełniają nierówność:

a) $3 < x < y < \sqrt{10}$ b) $2\pi < x < y < 7$ c) $-\sqrt{7} < x < y < -\sqrt{6}$

1.52. Porównaj dwie liczby niewymierne, bez użycia kalkulatora:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$ i $\frac{6}{\sqrt{3}-1}$ c) $\frac{4}{2-\pi}$ i $\frac{3}{2-\pi}$

d) $\frac{-2}{\sqrt{5}-3}$ i $\frac{-3}{\sqrt{5}-3}$ e) -7 i $\frac{-7}{\sqrt{2}-1}$ f) $\frac{4}{2\sqrt{2}-2}$ i $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

1.53. Wyznacz następujące sumy:

a) $\frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{89\cdot 90}$ b) $\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{2}{19\cdot 21}$

c) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101}$ d) $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{48\cdot 50}$

Przedziały

1.54. Zaznacz na osi liczbowej przedziały:

a) $\langle 1, 3)$ b) $(-3, 2\rangle$ c) $(0, 4)$

d) $\langle -1, 1\rangle$ e) $(-\infty, 2\rangle$ f) $(3, +\infty)$

1.55. Uzupełnij zapisy według wzoru:

1) $x \in (-\infty, 5)$ wtedy, gdy $x < 5$ 2) $x \in \langle -1, 5\rangle$ wtedy, gdy $-1 \le x \le 5$

a) $x \in \langle -4, 1)$ wtedy, gdy .... b) $x \in (-\infty, 0\rangle$ wtedy, gdy ....

c) $x \in (2, 7)$ wtedy, gdy .... d) $x \in (-3, -2\rangle$ wtedy, gdy ....

e) $x \in \left\langle \sqrt{2}, +\infty\right)$ wtedy, gdy .... f) $x \in \langle -\pi, 2\pi\rangle$ wtedy, gdy ....

1.56. Wypisz:

a) wszystkie liczby całkowite, należące do przedziału $(-2, 7\rangle$
b) wszystkie liczby naturalne, należące do przedziału $(-3, 3)$
c) najmniejszą liczbę naturalną, która należy do przedziału $(10, 100)$
d) największą liczbę naturalną, która należy do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 789\frac{1}{3} \right\rangle$
e) największą liczbę całkowitą, która nie należy do przedziału $(-5, +\infty)$
f) najmniejszą liczbę całkowitą, która jest większa od wszystkich liczb należących do przedziału $\left\langle -100, -23\frac{5}{6} \right\rangle$.

1.57. Podaj co najmniej dwie liczby niewymierne, które należą do podanego przedziału:

a) $(4; 6)$ b) $\langle -11; -10\rangle$ c) $(-1; -0{,}5)$

1.58. Wymień wszystkie liczby całkowite należące do przedziału $\left\langle -0{,}5\pi; \sqrt{7} \right\rangle$.

1.59. Wymień wszystkie liczby naturalne należące do przedziału $\left(-\sqrt{2}, 2\pi\right)$.

1.60. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$:

a) $A = \langle -2, 3), B = (0, 6\rangle$ b) $A = (-\infty, 2\rangle, B = \langle 2, 4\rangle$
c) $A = \left(\sqrt{3}, +\infty\right), B = (-4, 2)$ d) $A = (-\infty, \pi), B = \left(-\infty, 3\frac{1}{3}\right\rangle$

1.61. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory $A - B$ oraz $B - A$, jeśli:

a) $A = \langle -5, 1\rangle, B = (-2, 4)$ b) $A = (3, 9\rangle, B = \langle 3, 7\rangle$
c) $A = (-\infty, 2), B = \left\langle \sqrt{2}, +\infty\right)$ d) $A = (-2, 6), B = (1, 3\rangle$

1.62. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$, jeśli:

a) $A = (-1, 4\rangle, B = \langle 2, 5\rangle$ b) $A = (-2, 1), B = \langle 1, 4)$
c) $A = (-\infty, 6\rangle, B = (4, 7\rangle$ d) $A = (2, +\infty), B = (-\infty, 3\rangle$

1.63. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ oraz $B - A$, jeśli:

a) $A = (-1, 1\rangle \cup \langle 3, 6\rangle, B = \langle 0, 2)$
b) $A = \langle -2, 1), B = (-4, -1\rangle \cup \langle 0, 3)$
c) $A = \langle -3, 0\rangle \cup (5, 7), B = \langle -4, -2\rangle \cup (3, 6)$
d) $A = (-1, 1) \cup (2, 4\rangle, B = \langle -2, 0) \cup (3, 5\rangle$

1.64. Zaznacz na osi liczbowej zbiór A, a następnie wyznacz zbiór A', jeśli:

a) $A = (-3, 3)$
b) $A = \langle -1, 2\rangle$
c) $A = (-2, 4\rangle$
d) $A = (-\infty, 4)$
e) $A = (-5, +\infty)$
f) $A = (-1, 2) \cup \langle 4, 5\rangle$

1.65. Zapisz dany zbiór za pomocą przedziału lub sumy przedziałów:

a) $\boldsymbol{R} - (3, +\infty)$
b) $\boldsymbol{R} - (-\infty, 7\rangle$
c) $\boldsymbol{R} - (-1, 1)$
d) $\boldsymbol{R} - \langle -5, 0\rangle$
e) $\boldsymbol{R} - \{4\}$
f) $\boldsymbol{R} - \{-8, 0\}$
g) $\boldsymbol{R} - \{1, 2, 3\}$
h) $\boldsymbol{R} - (-3, 4\rangle$

1.66. Wyznacz część wspólną zbiorów:

a) $\boldsymbol{N} \cap (-1, 4)$
b) $\boldsymbol{Z} \cap \langle -3, 3)$
c) $\boldsymbol{Z}_{-} \cap (-6, -2\rangle$
d) $\left\langle -4\frac{1}{3}, 0\right\rangle \cap \boldsymbol{Z}$
e) $(-50, 3) \cap \boldsymbol{Z}$
f) $\langle -1, +\infty) \cap \boldsymbol{N}_{+}$

1.67. Dane są przedziały $A = \langle -2, 5\rangle$, $B = (3, +\infty)$ oraz zbiory $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{Z}$. Wyznacz zbiory:

a) $(A \cup B) \cap \boldsymbol{Z}$
b) $(A \cap \boldsymbol{N}) \cup B$
c) $(A \cap B) - \boldsymbol{Z}$
d) $(\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{N}) \cap (A \cup B)$
e) $(A - B) \cap \boldsymbol{N}$
f) $(B - A) \cup (\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{N})$

Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych

1.68. Wypisz wszystkie liczby całkowite większe od (-6) i jednocześnie mniejsze od 10. Ile jest wśród nich liczb:

a) naturalnych
b) pierwszych
c) złożonych
d) parzystych
e) nieparzystych
f) podzielnych przez 3
g) które są kwadratami liczb całkowitych
h) które są sześcianami liczb całkowitych

1.69. Rozłóż na czynniki pierwsze następujące liczby:

a) 246
b) 125
c) 12870
d) 2310

1.70. Wyznacz zbiór wszystkich naturalnych dzielników liczby:

a) 27
b) 43
c) 48
d) 65

1.71. Które z podanych liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 są dzielnikami liczby:

a) 23141208
b) 7523487
c) 342100440
d) 27000000?

1.72. Liczba 325 jest podzielna przez 13. Oceń, czy podane poniżej liczby są również podzielne przez 13. Nie wykonuj obliczeń.

a) $325 - 130 \cdot 7$ b) $4 \cdot 325 + 169 \cdot 11$

c) $11 \cdot 325 - 13 \cdot 19$ d) $3250 + 17 \cdot 128$

1.73. Litera X oznacza w liczbie $342725X4$ cyfrę dziesiątek. Wpisz w miejsce X taką cyfrę, aby dana liczba była podzielna przez 6. Podaj wszystkie rozwiązania.

1.74. Litera X oznacza w liczbie $479999X45$ cyfrę setek. Wpisz w miejsce X taką cyfrę, aby dana liczba była podzielna przez 15. Podaj wszystkie rozwiązania.

1.75. Wyznacz $NWD(a, b)$ oraz $NWW(a, b)$, jeśli:

a) $a = 780$, $b = 1326$ b) $a = 220$, $b = 165$

c) $a = 700$, $b = 1650$ d) $a = 396$, $b = 2970$

e) $a = 360$, $b = 132$ f) $a = 294$, $b = 490$

1.76. Zapisz liczbę naturalną x w ogólnej postaci, jeśli ta liczba jest podzielna przez

a) 5 b) 2 i 3 c) 3 i 6 d) 6 i 9 e) 8 i 4 f) 15 i 9

1.77. Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków (idąc tą samą trasą). Bartek stawia kroki o długości 48 cm, zaś Jurek – o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy (ostatni ślad na brzegu jeziora)? Wynik podaj w metrach.

1.78. W pewnej chwili planety Wenus i Merkury zajmują określone położenie względem Słońca. Po upływie ilu dni znajdą się w tym samym położeniu, jeśli Wenus wykonuje pełny obieg wokół Słońca w ciągu 225 dni, a Merkury – w ciągu 88 dni?

1.79. Dwie krawcowe obszywają brzegi obrusów. Pierwszej ta czynność zabiera 20 minut, natomiast drugiej – 25 minut. Obie zaczynają pracę o godzinie $7^{\underline{00}}$.

a) O której godzinie obydwie krawcowe pierwszy raz skończą jednocześnie obszywać obrusy?

b) Ile razy skończą jednocześnie obszywać obrusy w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy?

1.80. Dwa autobusy wyruszają z tego samego miejsca postoju w dwóch różnych kierunkach i po przebyciu swojej trasy wracają na miejsce startu. Pierwszy autobus wraca po 3 godzinach i 15 minutach i wyrusza ponownie w drogę po 15 minutach postoju. Drugi autobus wraca po 4 godzinach i 50 minutach i wyrusza po 25 minutach postoju. Oba autobusy wyruszyły z miejsca postoju o godzinie $5^{\underline{10}}$. O której godzinie najwcześniej autobusy wyruszą ponownie jednocześnie z miejsca postoju?

1.81. Ola ma w skarbonce kwotę 243 zł, którą chce wymienić na jak największą liczbę monet o nominale: a) 2 zł, b) 5zł. Ile monet danego nominału będzie miała Ola po tej wymianie? Zapisz kwotę Oli za pomocą działania, które uwzględnia liczbę monet danego nominału i pozostałą resztę.

1.82. W wyniku podzielenia z resztą liczby 500 przez 13 otrzymujemy wynik 38 i resztę 6, co opisuje działanie: $500 = 13 \cdot 38 + 6$. Wykonaj dane dzielenie z resztą. Następnie zapisz dzielną jako wynik odpowiedniego działania, według podanego wzoru.

a) $248 : 23$ b) $146 : 54$ c) $1231 : 66$ d) $2079 : 138$

1.83. W wyniku podzielenia z resztą liczby –400 przez 19 otrzymujemy wynik –22 i resztę 18 (reszta jest dodatnia!), co opisuje działanie: $-400 = 19 \cdot (-22) + 18$. Wykonaj dane dzielenie z resztą. Następnie zapisz dzielną jako wynik odpowiedniego działania, według podanego wzoru.

a) $-248 : 23$ b) $-146 : 54$ c) $-1231 : 66$ d) $-2079 : 138$

1.84. Wypisz elementy każdego z podanych niżej zbiorów.

a) $A = \{x\colon x = 3n + 1 \text{ i } n \in \boldsymbol{N}\}$ b) $B = \{x\colon x = 5n + 3 \text{ i } n \in \boldsymbol{N}\}$

c) $C = \{x\colon x = 4k + 2 \text{ i } k \in \boldsymbol{Z} \text{ i } k \leq 1\}$ d) $D = \{x\colon x = 6k + 5 \text{ i } k \in \boldsymbol{Z} \text{ i } k > -3\}$

1.85. Zapisz liczbę x w ogólnej postaci wiedząc, że:

a) liczba x jest o 5 większa od liczby naturalnej p
b) liczba naturalna x jest o 2 mniejsza od liczby naturalnej n
c) liczba x jest 7 razy większa od liczby naturalnej a
d) liczba x jest 3 razy mniejsza od liczby naturalnej m
e) liczba x jest naturalną wielokrotnością liczby 4
f) liczba x jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejsza jest n
g) reszta z dzielenia liczby naturalnej x przez 4 jest równa 3
h) reszta z dzielenia liczby naturalnej x przez 3 jest równa 2.

1.86. Niech k oznacza dowolną liczbę całkowitą. Zapisz symbolicznie, używając k:

a) liczbę całkowitą, będącą wielokrotnością liczby 8
b) liczbę całkowitą, która w wyniku podzielenia przez 5 daje resztę 4
c) liczbę przeciwną do liczby $2k - 3$
d) odwrotność liczby nieparzystej
e) cztery kolejne liczby parzyste, z których największą jest liczba $2k$
f) trzy kolejne liczby nieparzyste, z których najmniejszą jest liczba $2k - 5$
g) dwie kolejne liczby całkowite niepodzielne przez 3
h) trzy kolejne liczby całkowite niepodzielne przez 4.

1.87. Liczba k jest całkowita. Podaj resztę z dzielenia liczby x przez liczbę y, jeśli:

a) $x = 6k + 4,\ y = 6$
b) $x = 10k - 3,\ y = 10$
c) $x = 8k - 1,\ y = 8$
d) $x = 6k + 4,\ y = 3$
e) $x = 10k - 3,\ y = 5$
f) $x = 8k - 1,\ y = 4$

1.88. Sprawdź, czy suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna:

a) przez 12
b) przez 6
c) przez 3

1.89. Sprawdź, czy suma czterech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5 jest podzielna:

a) przez 5
b) przez 10
c) przez 20

1.90. Dane są dwie kolejne liczby całkowite a i b, gdzie $a < b$. Liczba a w wyniku podzielenia przez 5 daje resztę 3. Wyznacz resztę z podzielenia liczby $3(a + b)$:

a) przez 30
b) przez 15
c) przez 10

1.91. Sprawdź, czy suma trzech kolejnych liczb całkowitych może być równa:

a) 325
b) 273
c) 420

1.92. Sprawdź, czy suma trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych może być równa:

a) 132
b) 521
c) 315

1.93. Aby wyznaczyć największy wspólny dzielnik liczb 1224 i 216, możemy posłużyć się algorytmem Euklidesa w następujący sposób:

$$1224 = 5 \cdot 216 + 144$$
$$216 = 1 \cdot 144 + \underline{\mathbf{72}}$$
$$144 = 2 \cdot 72 + 0$$
$$NWD(1224, 216) = 72$$

Postępując podobnie, wyznacz:

a) $NWD(1408, 3200)$
b) $NWD(7371, 1365)$
c) $NWD(1615, 2618)$
d) $NWD(22991, 19667)$

1.94. Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 168, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 24. Znajdź te liczby.

1.95. Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 6174, a ich największy wspólny dzielnik równa się 21. Znajdź te liczby.

1.96. Wyznacz wszystkie wartości n, gdzie $n \in \mathbf{N}_+$, dla których liczba mająca postać $1 - \frac{4}{n}$ jest:

a) całkowita
b) naturalna.

1.97. Wyznacz wszystkie wartości n, gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$, dla których liczba mająca postać $1 + \frac{12}{n}$ jest pierwsza.

1.98. Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która jest podzielna przez 2, 3 i 4, zaś reszta z dzielenia tej liczby przez 5 jest równa 1.

1.99. Pewna liczba naturalna mniejsza od 2000 ma tę własność, że jeśli odejmiemy od niej 120, to wynik będzie podzielny przez 24; a jeśli od niej odejmiemy 92, to wynik będzie podzielny przez 46. Wyznacz tę liczbę.

1.100. Reszta z dzielenia liczby całkowitej przez 3 jest równa 2, a reszta z dzielenia tej liczby przez 4 jest równa 1. Wyznacz resztę z dzielenia tej liczby całkowitej przez 12.

1.101. Reszta z dzielenia liczby całkowitej przez 4 jest równa 3, a reszta z dzielenia tej liczby przez 5 jest równa 4. Wyznacz resztę z dzielenia tej liczby całkowitej przez 20.

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o równaniach

1.102. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Sprawdź, czy podane obok liczby spełniają dane równanie:

a) $2 - x^2 = 3x + 4$ $\quad -2,\ -1,\ 0$

b) $27 + x^3 = 3 - x$ $\quad -3,\ 1,\ 3$

c) $\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} = 0$ $\quad -\sqrt{2},\ 0,\ 1$

d) $\sqrt{\frac{x^4 + 1}{68}} = 0{,}25x$ $\quad -2,\ 1,\ 2$

1.103. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznacz zbiór rozwiązań tego równania.

a) $2x = 3x$
b) $3(x + 2) = 0$
c) $(x - 7)^2 = 0$
d) $x^2 = -9$
e) $(x + 5)(x + 5) = 0$
f) $x^2 + 1 = 0$
g) $(x + 1)^2 = 0$
h) $x^2 = 2$
i) $x^2 = 0{,}25$

1.104. Dziedziną równania jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznacz zbiór rozwiązań tego równania.

a) $x(x - 4) = 0$
b) $(x + 11)(x - 9) = 0$
c) $(x + 5)(x - 3) = 0$
d) $2x^2(x^2 - 64) = 0$
e) $(x^2 - 7)(x^2 + 81) = 0$
f) $(x + 1)(x - 2)x = 0$

1.105. Wyznacz dziedzinę równania:

a) $\frac{2x}{x-2}=0$ b) $\frac{4x+1}{3}=\frac{1}{x^2-1}$ c) $\frac{4}{3x^2}=4$

d) $\frac{6-x}{x+4}=x+5$ e) $\frac{x+5}{x^2-9}=1+x$ f) $\frac{1}{3-x^2}=\frac{2}{x}$

1.106. Wyznacz dziedzinę równania:

a) $\frac{x}{x^2+1}=x-1$ b) $\frac{2x}{x(x+1)}=0$ c) $\frac{3x-6}{25-x^2}=\frac{x^2}{x}$

d) $\frac{x}{(x+4)^2}=\frac{3}{x^2-9}$ e) $\frac{\sqrt{x}}{x-1}=0$ f) $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{3}{4-x^2}$

1.107. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania.

a) $\frac{12}{x}=4$ b) $\frac{16}{x^2}=1$ c) $\frac{x+2}{x-2}=0$

d) $\frac{(x-1)(x+5)}{x+3}=0$ e) $\frac{x-7}{x^2-49}=0$ f) $\frac{36-x^2}{x(x-6)}=0$

1.108. Rozwiąż równanie. Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny równania.

a) $\sqrt{x^2+1}=1$ b) $\sqrt{x^2+5}=3$ c) $\sqrt{x+1}=0$

d) $\sqrt{x}(x+3)=0$ e) $\frac{4}{\sqrt{x}}=1$ f) $\frac{x+2}{\sqrt{-x}}=0$

1.109. Podaj przykład równania, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R}$, a zbiorem rozwiązań jest dany zbiór A.

a) $A=\{7\}$ b) $A=\{0,-4\}$ c) $A=\varnothing$

d) $A=\boldsymbol{R}$ e) $A=\{1, 2, 3\}$ f) $A=\{-\pi, \pi\}$

D **1.110.** Wykaż, że dane równanie jest tożsamościowe.

a) $2x(x+4)-x(x+8)=x^2$ b) $-4(x-3)x+2x^2=2(6x-x^2)$

c) $\frac{3x-6}{3}-\frac{2x+10}{2}+7=0$ d) $\frac{2(x-3)}{5}+\frac{4(1,5+2x)}{5}=2x$

D **1.111.** Wykaż, że dane równanie nie jest tożsamościowe i nie jest sprzeczne.

a) $x^3=x$ b) $|x|=x$ c) $(x+1)^2=x^2+1$ d) $\sqrt{x^2+4}=x+2$

1.112. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{2-x}=2$ b) $x\sqrt{x-1}=0$ c) $(x-6)\sqrt{x}=0$ d) $(x^2-1)\sqrt{-x}=0$

e) $\frac{x-4}{\sqrt{x+2}}=0$ f) $\frac{x+2}{\sqrt{x}}=0$ g) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}=0$ h) $\frac{x^2-4}{\sqrt{1-x}}=0$

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych

1.113. Sprawdź, czy podane obok równania liczby są rozwiązaniami tego równania:

a) $2x+10=7x-5$; -3; 3

b) $-3x+5=4(2x-0{,}5)$; 1; $\frac{1}{2}$

c) $-3{,}75x+4(2x+6)=1{,}25x$; -8; $1\frac{1}{3}$

d) $-2(x-9)-7=x+5-3(x-2)$; 0; $2\frac{1}{5}$

1.114. Rozwiąż równania z niewiadomą x. Pamiętaj o określeniu dziedziny równania.

a) $2x-3(x+6)=4x+2$ b) $\frac{x-5}{x+2}=0$

c) $\frac{3x-1}{3}=\frac{2x+5}{2}$ d) $\frac{2{,}5x-1}{4}-\frac{5}{8}x=0{,}25+x$

e) $\frac{x+3}{x-1}=\frac{2}{3}$ f) $\frac{3}{4}(x+4)=0{,}75x+3$

g) $\frac{x-2}{x+4}-\frac{5}{6}=0$ h) $\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x}=0$

1.115. Rozwiąż poniższe równania. Czy równania określone w takiej samej dziedzinie są równoważne?

a) I. $(2x-4)-(x+5)=3x-1$ II. $(x+3)2x=2x^2-24$ III. $\frac{x^2-16}{x-4}=0$

b) I. $\frac{x-1}{x+2}=0$ II. $\frac{3x-1}{x+2}=\frac{2}{3}$ III. $(x-4)-(2x-9)=0$

c) I. $\frac{x+2}{3}=\frac{x+1}{2}$ II. $3x(x+2)=0$ III. $\frac{x^2-4}{x-2}=0$

d) I. $\frac{3+x}{x}=0$ II. $\frac{x^2+2x+6}{x^2}=1$ III. $\frac{3x-1}{x^2+1}=\frac{3}{x}$

1.116. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3x-4}{2}=\frac{4x-5}{3}$
b) $\frac{x}{2}=\frac{8}{x}$
c) $\frac{2}{x^2}=\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{x-1}+2=0$
e) $\frac{3(x-1)}{5}-\frac{x-3}{2}=\frac{x-8}{10}$
f) $\frac{3(x-11)}{4}=\frac{3(x+1)}{5}-\frac{2(2x-5)}{11}$
g) $\frac{x(x-1)}{4}-\frac{2x^2+1}{2}=-\frac{3}{4}x^2-0{,}25(x+2)$
h) $\frac{x+\frac{4-x}{3}}{5}=\frac{x-\frac{x-5}{5}}{3}$

1.117. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{2}x-5=0$
b) $1+\sqrt{3}x=x+2$
c) $2-\sqrt{2}x=x-4$
d) $2x+3+x\sqrt{3}=4$
e) $\left(x+2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\sqrt{3}x-1$
f) $\sqrt{5}\left(x-\sqrt{5}\right)=10-x$

1.118. Wyznacz liczbę a, dla której rozwiązaniem równania z niewiadomą x jest podana obok równania liczba.

a) $2x+a=5$; 7
b) $x^2-7=a+x$; -2
c) $\frac{a^2}{x-1}=x$; 3
d) $\frac{2x+3}{a}=-x+9$; 6
e) $(x+a)(x+2)=6$; -4
f) $(2x+1)a^2=3x$; -1
g) $\sqrt{-x}=30+a$; -25
h) $\sqrt{7+x}=-\frac{1}{3}a$; -3

1.119. Dane jest równanie z niewiadomą x. Wyznacz wartość liczby a, dla której podana obok równania liczba jest jego rozwiązaniem.

a) $2(x+4)+a=0{,}5x+9{,}5$; 5
b) $(3x-4)(3x+a)=9x^2+1$; 7
c) $\frac{2x}{x^2+9}=\frac{2x+a}{27}$; 3
d) $3-2x^3=\frac{x^2+a}{4}$; -1
e) $(x-a)(2x+1)=(2x-a)(x+1)$; -1
f) $(3x+1)(x+a)-3(x-1)(x-a)=4$; $0{,}5$

g) $3(2x+a)(3x+2)-2(3x+1)^2=43$; 1

h) $\frac{ax-5}{6}+\frac{x+a}{4}=\frac{5-ax}{3}-\frac{3a-7x}{4}-x$; 1

1.120. Wyznacz trzy kolejne liczby całkowite:

a) parzyste, których suma wynosi (-162)

b) nieparzyste, których suma wynosi (-147).

1.121. Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne:

a) parzyste, których suma wynosi 68

b) nieparzyste, których suma wynosi 112.

1.122. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych parzystych jest równy kwadratowi mniejszej z nich. Co to za liczby?

1.123. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych parzystych jest równy kwadratowi większej z nich. Co to za liczby?

Nierówność z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych

1.124. Sprawdź, czy podane obok nierówności liczby należą do zbioru rozwiązań tej nierówności:

a) $x^2>4$; -5; 0; $\sqrt{3}$

b) $x^2\le 3x$; $-\sqrt{5}$; 0; $2{,}5$

c) $x^2\ge x^3$; -1; 0; $\frac{1}{2}$

d) $x^2<-4x$; -10; $-\sqrt{3}$; 0

e) $6-x^2>x+3$; 0; -10

f) $4x(x+8)\le 16(x+3)$; 2; -7

1.125. Rozwiąż nierówność i zaznacz zbiór rozwiązań tej nierówności na osi liczbowej:

a) $2x-7>-1$

b) $-3x+7<-2$

c) $0{,}5x+6\le x$

d) $x-9\ge 3x$

e) $\frac{2x}{3}<-2x+1$

f) $\frac{x}{4}-1\le\frac{x}{2}$

g) $\frac{2\cdot(x+6{,}5)}{3}\ge 5x-13$

h) $-4(x+5)>3x-6$

1.126. Czy dane nierówności są równoważne? Odpowiedź uzasadnij.

a) $x^2+3>0$ i $-x^2<0$
b) $x^2+1>0$ i $x^2+2>-3$
c) $x^2>9$ i $x>3$
d) $x^2\le 4$ i $x\le 2$
e) $\frac{x+3}{2}>3\cdot x$ i $x+3>6\cdot 2x$
f) $-2(x+5)\ge 4$ i $x+5\le -2$
g) $x+2>0$ i $x^2+2x>0$
h) $0{,}5x^2+1>0$ i $-3x^2\le 0$

1.127. Rozwiąż poniższe nierówności. Wskaż nierówności równoważne.

a) I. $\frac{1}{2}x>5$ II. $3{,}5(x-7)>2{,}5x-14{,}5$ III. $x+8<18$

b) I. $3(x+3)\le 2(x-1)$ II. $(2x-3)(-0{,}6)\ge 1{,}5$ III. $-\frac{3}{5}(x+1)\ge 6$

c) I. $x(x+1)\ge x^2-2$ II. $\frac{x(6x-5)}{3}\le 2x^2+3\frac{1}{3}$ III. $(-1)(x+2)\le 0$

d) I. $x>x-2$ II. $\frac{x+1}{4}>0{,}25x-3$ III. $x(x-2)>x^2-2x+5$

1.128. Rozwiąż nierówności:

a) $4{,}2(x+5)+1{,}8\le -2{,}4$
b) $2x-5>2(x+3)$
c) $3(2-4x)+2x\ge 5(1-2x)$
d) $-2(3x+1)<3(2-x)$
e) $(8x-10):(-5)\ge 13-0{,}5x$
f) $(3x-10)\cdot(-0{,}5)\le 1{,}5\cdot(2x+8)$
g) $(2x+5)(-3)<2(1-3x)$
h) $(x-5):(-6)\ge(x+2):(-3)$

1.129. Rozwiąż nierówności podwójne:

a) $-6<x+4<0$
b) $5\ge 2x+1\ge -5$
c) $-3+3x<2x-5\le x$
d) $3>-x\ge -7$
e) $-1\le -x+3<8$
f) $-x+6\le 2x\le 3x+1$
g) $2-x\le 2x+1<-x-5$
h) $5x-6\le -3x+2\le x-2$

1.130. Rozwiąż nierówności:

a) $2(x-1)-3(x-2)<6$
b) $-3(2x+4)+5(x-2)\ge -x+5$
c) $\frac{1}{8}(5{,}6x-4)\le 0{,}3x+4{,}5$
d) $-1\frac{2}{3}(x+6)\ge\frac{1}{6}(x+3)+0{,}5$
e) $\frac{x-5}{7}<\frac{3x+2}{21}$
f) $\frac{x+2}{3}-\frac{x+4}{4}>\frac{x+1}{12}$
g) $\frac{4-x}{5}-\frac{x+2}{3}\ge\frac{2-8x}{15}$
h) $\frac{x-5}{2}-\frac{3-x}{6}\le\frac{x+4}{3}$

1.131. Rozwiąż nierówność i zapisz zbiór rozwiązań za pomocą przedziału:

a) $-\frac{2+x}{3}+\frac{3-x}{6}<1$
b) $x-\frac{3(x+2)}{4}>1+x$

c) $\frac{3}{4}x-\frac{4x+1}{2}\geq -x-\frac{3}{8}$

d) $\frac{5-4x}{3}+x\geq -2x+\frac{1}{4}$

e) $\frac{x-\frac{3-2x}{2}}{5}>2$

f) $\frac{\frac{x-2,6}{3}-2x}{4}\geq\frac{x+2}{5}$

1.132. Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\sqrt{3}-3\right)x>\sqrt{3}$

b) $\left(2-\sqrt{2}\right)x>\sqrt{2}$

c) $\left(1+\sqrt{5}\right)x\leq 1+\sqrt{5}$

d) $\left(2-\sqrt{5}\right)x\geq\sqrt{5}-2$

e) $(3-\pi)x<-1$

f) $3x-3\sqrt{3}\,x\leq 6$

g) $-2x+4\geq 6-x\sqrt{2}$

h) $6+x\sqrt{7}<3x+2\sqrt{7}$

1.133. Wyznacz liczbę a, dla której zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór podany obok tej nierówności:

a) $3x+a\geq 2x+1;\quad \langle -5,+\infty)$

b) $-x+4\geq 2x+a;\quad (-\infty,-3\rangle$

c) $-4(x+a)<12;\quad (-2,+\infty)$

d) $2(x-a)>3(x+a);\quad (-\infty,10)$

e) $3(2x-a)\leq 6(1+x);\quad \boldsymbol{R}$

f) $4x-1\leq ax+1;\quad \boldsymbol{R}$

g) $ax+2\geq x-10;\quad \langle -6,+\infty)$

h) $2(x-5)<ax-16;\quad (-1,+\infty)$

1.134. Podaj przykład liczby:

a) ujemnej, spełniającej nierówność: $x^2>25$

b) dodatniej, spełniającej nierówność: $\frac{2}{x}>2$

c) ujemnej, spełniającej nierówność: $\frac{-3}{x}>1$

d) będącej rozwiązaniem nierówności: $\frac{1}{x+2}>1$

e) będącej rozwiązaniem nierówności: $\frac{-2}{x+1}>3$

f) będącej rozwiązaniem nierówności: $\frac{-3}{4-x}>2$.

1.135. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2>-6$

b) $x^2+2<0$

c) $(x+1)^2\leq 0$

d) $(3-x)^4>0$

e) $-x^2-3\geq -1$

f) $-(x+2)^2\leq 1$

g) $(x-4)^2>0$

h) $(7-x)^2\leq 0$

1.136. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x}>0$

b) $\frac{2}{x}>1$

c) $\frac{-3}{x}>0$

d) $\frac{-5}{x}>1$

1.137. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2(x+2) \leq 0$ b) $x^2(x-3) \geq 0$ c) $x^2(x+1) < 0$ d) $x^2(x+5) > 0$

Procenty

1.138. Oblicz:

a) 30% liczby 1,2
b) 12% liczby 480
c) 1,4% liczby 1000
d) 150% liczby 27

1.139.

a) Wyznacz liczbę, której 40% jest równe 6.
b) Wyznacz liczbę, której 2% jest równe 15.
c) Wyznacz liczbę, której 1,8% jest równe 360.
d) Wyznacz liczbę, której 320% jest równe 20.

1.140. Jakim procentem liczby x jest liczba y, jeśli:

a) $x = 36$; $y = 90$
b) $x = 12{,}5$; $y = 8{,}75$
c) $x = 1420$; $y = 63{,}9$
d) $x = 10\frac{5}{12}$; $y = 4\frac{31}{36}$

1.141.

a) Liczba x stanowi 80% liczby y. Jakim procentem liczby x jest liczba y?
b) Liczba x stanowi $33\frac{1}{3}$% liczby y. Jakim procentem liczby x jest liczba y?
c) Liczba x stanowi $28\frac{4}{7}$% liczby y. Jakim procentem liczby x jest liczba y?
d) Liczba x stanowi $66\frac{2}{3}$% liczby y. Jakim procentem liczby x jest liczba y?

1.142. Ekipa Jurka ułożyła 300 m światłowodu. W tym samym czasie ekipa Wojtka ułożyła 270 m światłowodu.

a) O ile procent światłowód ułożony przez ekipę Jurka jest dłuższy od światłowodu ułożonego przez ekipę Wojtka?
b) O ile procent światłowód ułożony przez ekipę Wojtka jest krótszy od światłowodu ułożonego przez ekipę Jurka?

1.143. Powierzchnia jeziora Hańcza wynosi 3,1 km^2, a powierzchnia Wielkiego Stawu wynosi 0,3 km^2. O ile procent powierzchnia jeziora Hańcza jest większa od powierzchni Wielkiego Stawu? O ile procent mniejsza jest powierzchnia Wielkiego Stawu od powierzchni jeziora Hańcza? Wynik podaj z dokładnością do części setnych.

1.144. Rzeka Jangcy ma 6300 km długości, a rzeka Tygrys – 1950 km. O ile procent rzeka Jangcy jest dłuższa od rzeki Tygrys? O ile procent rzeka Tygrys jest krótsza od rzeki Jangcy? Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych.

1.145. Za położenie 1 m kabla elektrycznego od słupa linii niskiego napięcia do budynku trzeba zapłacić 120 zł plus 7% podatku VAT. Oblicz, ile złotych zapłaci inwestor za położenie 28 m kabla.

1.146. Za wykonanie pewnej usługi, do której dolicza się 23% podatku VAT, klient zapłacił 2528 zł 88 gr. Ile zapłaciłby za tę samą usługę, gdyby podatek VAT wynosił 7%?

1.147. Cena pewnego towaru wraz z 7% podatkiem VAT wynosi 59 zł 92 gr. Ile będzie kosztował ten sam towar, jeśli podatek VAT zostanie zwiększony do 23%?

1.148. Cenę piekarnika najpierw podniesiono o 5%, a potem obniżono o 30%. Ile początkowo kosztował piekarnik, jeśli obecnie, po obu zmianach cen, kosztuje 2087 zł 40 gr?

1.149. Cenę pewnego towaru dwukrotnie podnoszono o 10%. O ile procent należałoby jednorazowo podnieść cenę towaru, aby uzyskać ten sam efekt?

1.150. Cenę pewnego towaru najpierw podniesiono o 10%, a następnie obniżono o 20%. O ile procent końcowa cena towaru była niższa od początkowej ceny?

1.151. Cenę pewnego towaru podniesiono o 25%, a po pewnym czasie obniżono do początkowej wartości. O ile procent została obniżona cena towaru?

1.152. Po dwukrotnej obniżce ceny towaru, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa stanowi 64% ceny pierwotnej. O ile procent dokonywano każdorazowo obniżki ceny towaru?

1.153. Po dwukrotnej podwyżce ceny towaru, za każdym razem o ten sam procent, jego cena końcowa jest o 21% większa od pierwotnej. O ile procent dokonywano każdorazowo podwyżki ceny towaru?

1.154. Cena biletu na mecz piłki nożnej wynosiła 150 zł. Gdy cenę obniżono okazało się, że na mecz przychodziło o 50% widzów więcej, a dochód uzyskany ze sprzedaży biletów na jeden mecz wzrósł o 25%. O ile złotych obniżono cenę biletu?

1.155. Wczoraj na lekcji matematyki w klasie Ib obecnych uczniów było 8 razy tyle, co nieobecnych. Dzisiaj nie przyszło jeszcze dwóch i nieobecni stanowią 20% uczniów obecnych. Ilu uczniów jest w klasie?

1.156. Jola i Bartek wyruszyli jednocześnie z tego samego domu do szkoły. Długość kroku Joli jest o 10% mniejsza od długości kroku Bartka, ale Jola robi w tym samym czasie o 20% kroków więcej niż Bartek. Kto pierwszy dotrze do szkoły?

1.157. Pani Marta stosuje 3-procentową zalewę octową do marynaty z ogórków. Ile litrów octu 10% i ile litrów wody powinna zmieszać, aby otrzymać 2,5 litra takiej zalewy?

1.158. Działkowicz musi zrobić oprysk winorośli 0,2-procentowym roztworem dithane 500, ale kupił 10-procentowy koncentrat tego środka. Ile musi wziąć koncentratu, aby przygotować płyn o żądanym stężeniu, jeśli chce przygotować płyn na 3-krotne napełnienie opryskiwacza plecakowego o pojemności 5 litrów?

1.159. Ile gramów złota próby 960 należy dołożyć do 55,7 g złota próby 583, aby otrzymać stop złota próby 750?

1.160. Tabela poniżej przedstawia inflację roczną w latach 1987–2018.

rok	inflacja (w %)
1987	25,2
1988	60,2
1989	251,1
1990	585,8
1991	70,3
1992	43,0
1993	35,3
1994	32,2

rok	inflacja (w %)
1995	27,8
1996	19,9
1997	14,9
1998	11,8
1999	7,3
2000	10,1
2001	5,5
2002	1,9

rok	inflacja (w %)
2003	0,8
2004	3,5
2005	2,1
2006	1,0
2007	2,5
2008	4,2
2009	3,5
2010	2,6

rok	inflacja (w %)
2011	4,3
2012	3,7
2013	0,9
2014	0,0
2015	–0,9
2016	–0,6
2017	2
2018	2

Inflacja to wskaźnik średniego wzrostu cen towarów i usług. W tabeli powyżej przedstawiona jest inflacja roczna, czyli wskaźnik średniego wzrostu cen w danym roku, w stosunku do roku poprzedniego. Wykorzystując dane w tabeli, możemy obliczyć inflację na przestrzeni kilku lat. W tym celu zdefiniujmy roczny czynnik wzrostu cen (RCWC), który dla inflacji p% jest równy $1+\frac{p}{100}$. Żeby obliczyć łączną inflację w latach 1998, 1999, 2000 (z dokładnością do 0,1%), najpierw wyznaczamy RCWC dla tych lat. Otrzymujemy: 1,118; 1,073; 1,101. Następnie mnożymy te trzy wskaźniki: $1{,}118 \cdot 1{,}073 \cdot 1{,}101 \approx 1{,}321$. Z otrzymanego wyniku odczytujemy: $1{,}321 = 1 + \frac{32{,}1}{100}$. Zatem łączna inflacja była równa 32,1%.

a) Postępując analogicznie, oblicz łączną inflację w latach 2008, 2009, 2010, 2011.

b) Jeśli inflacja roczna przekracza 50%, to nazywamy ją hiperinflacją. Odczytaj z tabeli, w jakich czterech kolejnych latach w Polsce była hiperinflacja i oblicz łączną inflację w tych latach.

c) Deflacja jest to stały spadek przeciętnego poziomu cen wpływający na wzrost siły nabywczej pieniądza. W warunkach deflacji po pewnym czasie można kupić za tę samą kwotę więcej towarów i usług. W których latach w Polsce odnotowano deflację?

1.161. Pani Janina Nowak inwestuje na giełdzie za pośrednictwem pewnego biura maklerskiego. Za każdą zrealizowaną transakcję kupna lub sprzedaży biuro pobiera prowizję w wysokości 1,5% wartości transakcji.
Pani Nowak zainwestowała 20 000 zł, kupując 480 akcji spółki *A* po 12,5 zł za akcję, a resztę przeznaczyła na kupno akcji spółki *B* po 20 zł za akcję. Osobno zapłaciła prowizję. Po pewnym czasie, gdy za akcje spółki *A* płacono po 16 zł 40 gr, a akcje spółki *B* wzrosły o 18% w stosunku do ceny kupna, pani Nowak złożyła w biurze maklerskim zlecenie sprzedaży wszystkich posiadanych akcji. Zanim jednak zlecenie zostało wykonane, akcje spółki *B* potaniały o 5% w stosunku do ostatnio notowanej ceny.
Oblicz:
a) Ile akcji spółki *B* kupiła pani Nowak?
b) Po jakiej cenie zostały sprzedane akcje spółki *B*?
c) O ile procent wzrosła cena akcji spółki *A*?
d) Jaką kwotę otrzymała pani Nowak po sprzedaży wszystkich swoich akcji?
e) W jakiej wysokości zapłaciła prowizję?
f) Jaki zysk (w złotówkach oraz procentowy) osiągnęła pani Nowak na tej transakcji?

1.162. Podczas wakacji pewien student zawarł umowę - zlecenie w firmie usługowej na wykonanie pracy. W umowie pracodawca wpisał kwotę brutto wynagrodzenia. Ustalona przez pracodawcę kwota brutto stanowi tzw. przychód studenta. Pracodawca musi odprowadzić do urzędu skarbowego podatek dochodowy, który oblicza się w następujący sposób:
- 20% kwoty brutto stanowią koszty uzyskania przychodu.
- Przychód pomniejszony o koszty uzyskania przychodu stanowi dochód studenta.
- Podatek dochodowy jest równy 18% kwoty dochodu, z zaokrągleniem do pełnego złotego.

Kwota netto, wypłacona studentowi za jego pracę, to przychód pomniejszony o podatek dochodowy. Oblicz:
a) jaka kwota została wypłacona studentowi, jeżeli w umowie wpisana była kwota 2150 zł
b) jaka kwota brutto (w pełnych złotych) powinna być wpisana do tej umowy, jeżeli student umówił się z pracodawcą na wynagrodzenie netto w wysokości 2000 zł?

1.163. Pracodawca zawarł z pracownikiem umowę o dzieło na pewną kwotę. Ustalona kwota stanowi przychód pracownika, od którego odlicza się tzw. koszty uzyskania przychodu, które w tego rodzaju umowie stanowią 50% przychodu. Uzyskana różnica jest dochodem pracownika. Od uzyskanego dochodu pracodawca potrąca 20% podatku dochodowego i wypłaca pracownikowi kwotę w wysokości różnicy przychodu i potrąconego podatku.

Oblicz, jaką wypłatę otrzyma pracownik, z którym pracodawca zawarł umowę o dzieło na kwotę 26 000 zł.

1.164. Pewne towarzystwo ubezpieczeniowe udziela następujących zniżek w ubezpieczeniu OC za bezszkodową jazdę samochodem:

liczba lat bezszkodowej jazdy	**wysokość zniżki w %**
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6 i więcej	60

oraz, między innymi, takich zwyżek:

1. za wiek właściciela poniżej 25 lat – 30%
2. za okres posiadania przez właściciela prawa jazdy poniżej 3 lat – 25%
3. za wiek samochodu powyżej 10 lat – 5%
4. za użytkowanie samochodu jako taksówki – 40%

Jaki procent podstawowej stawki zapłacą za ubezpieczenie OC swoich samochodów następujące osoby (podano wszystkie potrzebne informacje):

a) Jan Nowak, wiek 23 lata, prawo jazdy od 4 lat, 2 lata bezszkodowej jazdy, samochód: 15-letni mercedes;
b) Katarzyna Wtorek, wiek 28 lat, prawo jazdy od 5 lat, 3 lata bezszkodowej jazdy, samochód: 2-letni fiat;
c) Grzegorz Bronowski, wiek 54 lata, prawo jazdy od 25 lat, 10 lat bezszkodowej jazdy, samochód – taksówka: 5-letni ford;
d) Jan Skibicki, wiek 20 lat, prawo jazdy od 1 roku, ubezpiecza swój pierwszy samochód, 20-letni mercedes.

1.165. Lokata 26000 zł jest oprocentowana w wysokości 4% w stosunku rocznym. W banku obowiązuje kapitalizacja:

a) roczna (bank po roku dopisuje do kapitału należne odsetki)
b) półroczna (bank po półroczu dopisuje do kapitału należne odsetki
c) kwartalna (bank po upływie trzech miesięcy dopisuje do kapitału należne odsetki)

Jaka będzie wartość lokaty po jednym roku? (Pomijamy podatek od dochodów kapitałowych.)

1.166. Po czterech latach oszczędzania na lokacie stan konta pani Wandy przy rocznej kapitalizacji odsetek wzrósł z 40000 zł do 50499,08 zł. Oblicz wysokość rocznego oprocentowania.

1.167. Pani Teresa Kowalska postanowiła ulokować na rok swoje oszczędności w jednym z dwóch różnych banków. W banku A oprocentowanie roczne wynosi 4%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał. W banku B oprocentowanie roczne wynosi 5%, z roczną kapitalizacją odsetek. Który z banków powinna wybrać pani Teresa Kowalska chcąc uzyskać większe odsetki? Odpowiedź uzasadnij.

1.168. Kredytobiorca otrzymał w banku kredyt w wysokości 7200 zł, który chce spłacić w ciągu pół roku, w ratach miesięcznych. Tabela przedstawia sposób spłaty kredytu. Kwota odsetek liczona jest według wzoru: kwota zadłużenia × 0,02.

kwota zadłużenia	**wysokość raty**	**kwota odsetek**	**wysokość spłaty**
7200	1200	144	1344
6000	1200		
4800	1200		
3600	1200		
2400	1200		
1200	1200		

a) Uzupełnij tabelkę.
b) Podaj kwotę odsetek, którą musiał oddać bankowi kredytobiorca.
c) Oblicz, o ile procent więcej złotych kredytobiorca oddał bankowi niż pożyczył?
d) Jakie było roczne oprocentowanie kredytu?

1.169. Klient zawarł z bankiem umowę na udzielenie mu kredytu w wysokości 12000 zł na jeden rok, przy rocznym oprocentowaniu 16%. Kwota kredytu ma być spłacana w czterech równych kwartalnych ratach. Do rat mają być dopisane odsetki od kwoty, która pozostała do spłaty.
a) Podaj kwoty wszystkich rat.
b) Oblicz, jaki procent kwoty kredytu stanowi suma wszystkich odsetek.

1.170. Pani Julia Malinowska wzięła kredyt w wysokości 6000 zł z banku, w którym oprocentowanie roczne dla kredytów gotówkowych wynosi 24%, z miesięczną kapitalizacją odsetek. Kredyt zaczęła spłacać po dwóch miesiącach od daty pożyczki i spłaciła w ciągu kolejnych 6 miesięcy, w równych ratach kwoty kredytu, do których były doliczane odsetki za niespłaconą kwotę kredytu. Oblicz kwotę odsetek, jaką pani Julia zapłaciła bankowi oraz jaki procent pożyczonej kwoty stanowiły te odsetki.

Punkty procentowe

1.171. Tabela poniżej przedstawia, ile procent uczniów pewnej szkoły brało udział w zajęciach SKS przed remontem i po remoncie sali gimnastycznej.

zajęcia	siatkówka	koszykówka	piłka ręczna	piłka nożna
przed remontem sali	5,5%	6%	3,6%	8%
po remoncie sali	7,7%	7,5%	5,4%	9%

a) O ile punktów procentowych i o ile punktów bazowych wzrosło zainteresowanie poszczególnymi zajęciami?
b) O ile procent zwiększyła się grupa osób uczęszczająca na dane zajęcia sportowe?

1.172. W pewnej szkole badano czytelnictwo w klasach pierwszych. Poniższa tabela przedstawia, jaki procent wszystkich książek wypożyczonych przez klasy pierwsze ze szkolnej biblioteki w roku szkolnym 2018/2019 wypożyczyły klasy: Ia, Ib, i Ic.

I a	I b	I c
23,4%	31,2%	32,76%

a) Wyraź w punktach procentowych i w punktach bazowych różnice w czytelnictwie pomiędzy tymi klasami.
b) O ile procent więcej wypożyczyła książek ze szkolnej biblioteki klasa Ic od klasy Ia?
c) O ile procent mniej wypożyczyła książek ze szkolnej biblioteki klasa Ia od klasy Ib?

1.173. Poparcie dla partii „A” w marcu było równe 24%. W kwietniu poparcie dla tej partii wzrosło o 3 punkty procentowe.
a) Ile procent było równe poparcie dla partii „A” w kwietniu?
b) O ile procent wzrosło poparcie dla partii „A” w kwietniu?

1.174. Bank zwiększył oprocentowanie kredytu z 20% do 21,5%.
a) O ile punktów procentowych zwiększono oprocentowanie kredytu?
b) O ile procent zwiększono oprocentowanie kredytu?

1.175. W banku obniżono oprocentowanie kredytu z 20% do 18,5%.
a) O ile punktów procentowych zmniejszono oprocentowanie?
b) O ile procent staniał kredyt w tym banku?

1.176. Rada Polityki Pieniężnej na początku roku obniżyła depozytową stopę procentową (która określa oprocentowanie jednodniowych depozytów składanych przez banki komercyjne w banku centralnym) z 2,75% do 2,5%. Podaj obniżkę depozytowej stopy procentowej:
a) w punktach procentowych
b) w punktach bazowych
c) w procentach.

1.177. Pewien bank podwyższył oprocentowanie kredytu hipotecznego o 80 punktów bazowych, co oznaczało podwyżkę o 12,5%. Oblicz wysokość oprocentowania kredytu hipotecznego po podwyżce.

1.178. W pewnym kraju obliczono inflację w dwóch kolejnych latach i zauważono, że w drugim roku inflacja była niższa o 120 punktów bazowych w stosunku do roku poprzedniego. Oznaczało to obniżenie inflacji o $109\frac{1}{11}\%$. Oblicz, jaka była inflacja w tych dwóch latach.

Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

1.179. Zaokrąglij daną liczbę do jednego miejsca po przecinku:
a) 0,234 b) 0,4719 c) 0,51403 d) 0,0651

1.180. Zaokrąglij daną liczbę do części setnych:
a) 1,254 b) 0,1495 c) 69,3457 d) 300,9148

1.181. Zaokrąglij daną liczbę do setek:
a) 3520 b) 15247 c) 231591 d) 137

1.182. Oszacuj wyniki obliczeń, a następnie oblicz na kalkulatorze dokładne wartości wyrażeń. Oblicz błąd bezwzględny swojego oszacowania.
a) $2 \cdot 13{,}6 + 44{,}32 + 670$ b) $4 \cdot 256 + 19 \cdot 39$
c) $450 : 14{,}9 + 18{,}9 \cdot 4$ d) $4{,}68 \cdot 5{,}13 + 99 \cdot 201$

1.183. Pani Nowakowa oszacowała wartość prezentów dla członków rodziny z okazji Świąt Bożego Narodzenia na kwotę 450 zł. Mężowi kupiła krawat za 56 zł, córce – bluzkę za 125 zł, synowi – spodnie za 90 zł, zięciowi – koszulę za 75 zł, zaś wnuczce – lalkę za 83 zł. Oblicz błąd bezwzględny, błąd względny i błąd procentowy oszacowania wartości zakupów, dokonany przez panią Nowakową.

1.184. Granice lądowe Wenezueli mają w przybliżeniu łączną długość 5000 km. Dokładne długości granic tego kraju z innymi państwami przedstawia poniższa tabela. Oblicz błąd bezwzględny i błąd procentowy przybliżonej długości granic lądowych Wenezueli.

dane państwo	Kolumbia	Brazylia	Gujana
długość granicy lądowej (w km) Wenezueli z danym państwem	2050	2200	743

1.185. Jaki błąd bezwzględny i jaki błąd procentowy popełniono, podając przybliżone powierzchnie wybranych państw europejskich?

państwo	Francja	Polska	Wielka Brytania
rzeczywista powierzchnia (w tys. km^2)	551,5	312,685	244,1
przybliżenie powierzchni (w tys. km^2)	550	310	250

1.186. Oceń, w którym przybliżeniu popełniono mniejszy błąd:

a)

	Mont Blanc	Rysy
wysokość rzeczywista	4807 m	2499 m
wysokość przybliżona	4800 m	2495 m

b)

	granica Polski z Ukrainą	morska granica Polski
długość rzeczywista	535 km	440 km
długość przybliżona	520 km	425 km

1.187. Wyznacz liczbę x, jeśli:

a) przybliżenie z nadmiarem liczby x jest równe 13,8; błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,012

b) przybliżenie z nadmiarem liczby x jest równe 1,05; błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,003

c) przybliżenie z niedomiarem liczby x jest równe 8,4; błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,26

d) przybliżenie z niedomiarem liczby x jest równe 24,102; błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,0014.

1.188. Wyznacz liczbę x, jeśli:

a) przybliżenie z nadmiarem liczby x jest równe 13,6; błąd względny tego przybliżenia wynosi 0,00369

b) przybliżenie z niedomiarem liczby x jest równe 24,1; błąd względny tego przybliżenia wynosi 0,001657

c) przybliżenie z nadmiarem liczby x jest równe 121, a błąd procentowy tego przybliżenia wynosi 0,5%

d) przybliżenie z niedomiarem liczby x jest równe 6, a błąd procentowy tego przybliżenia wynosi 4%.

1.189. Podaj przybliżenie dziesiętne liczb z dokładnością do 0,001:

a) $100\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{3}$

d) 15π e) $10\sqrt{7}$ f) $0,2\sqrt{11}$

$\sqrt{2} = 1,4142135...$
$\sqrt{3} = 1,7320508...$
$\sqrt{5} = 2,2360679...$
$\sqrt{6} = 2,4494897...$
$\sqrt{7} = 2,6457513...$
$\pi = 3,1415926...$

1.190. Wyraź szukane wielkości w centymetrach. Podaj przybliżenia dziesiętne z dokładnością do 0,1 cm:

a) długości przekątnej kwadratu, którego bok ma długość 4 cm;
b) wysokości trójkąta równobocznego, którego bok ma długość 1,5 cm;
c) obwodu koła o promieniu 1,8 cm.

1.191. Porównaj liczby x i y (nie używając kalkulatora):

a) $x=\frac{2\sqrt{3}-1}{6}$ oraz $y=\frac{1}{2}$ b) $x=1{,}5$ oraz $y=\frac{4+3\sqrt{5}}{9}$

c) $x=\frac{4+\sqrt{3}}{8}$ oraz $y=\frac{5}{8}$ d) $x=\frac{3\sqrt{5}-4}{10}$ oraz $y=\frac{2\sqrt{5}+1}{10}$

1.192. Nie używając kalkulatora sprawdź, czy:

a) liczba $\frac{8\sqrt{3}-5}{6}$ należy do przedziału $\left(\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}\right)$

b) liczba $\frac{5-5\sqrt{3}}{7}$ należy do przedziału $\left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}\right)$.

Test sprawdzający do rozdziału 1.

1. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 4, które są nie większe od 16. Wówczas:

A. $A=\{4, 8, 12, 16\}$ B. $A=\{0, 4, 8, 12\}$ C. $A=\{0, 4, 8, 12, 16\}$ D. $A=\{4, 8, 12\}$

2. Niech $A=\{3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wówczas

A. $A-B=\varnothing$ B. $A-B=\{1, 2, 4\}$ C. $A-B=\{7, 9\}$ D. $A-B=\{1, 2, 4, 7, 9\}$

3. Niech A oznacza zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 3; B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 2. Wówczas zbiór $A \cap B$ oznacza:

A. zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 6
B. zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 6
C. zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 2 lub przez 3
D. zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 2 lub przez 3.

4. Zbiór X ma 6 elementów, zbiór Y ma 5 elementów, a do zbioru $X \cup Y$ należy 8 elementów. Oznacza to, że liczba elementów zbioru $X \cap Y$ jest równa

A. 3 B. 2 C. 1 D. 6

5. Ile liczb naturalnych dwucyfrowych należy do zbioru $A = \{x: x = 2n \text{ i } n \in \mathbf{N}\}$?

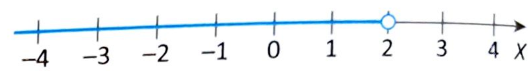
A. 90 B. 50 C. 49 D. 45

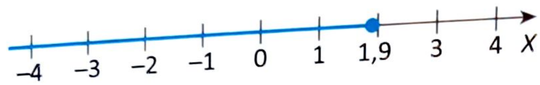
6. Rozwinięcie dziesiętne nieskończone $0,(18)$ przedstawia liczbę:

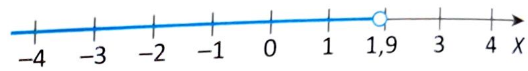
A. $\frac{18}{101}$ B. $\frac{9}{50}$ C. $\frac{2}{11}$ D. niewymierną

7. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których prawdziwa jest nierówność $x \leq 1,(9)$ jest przedstawiony na osi liczbowej:

A. 

B. 

C. 

D. 

8. Wskaż liczbę niewymierną, która należy do przedziału $(-1, 0\rangle$.

A. 0 B. $-0{,}5\pi$ C. $-0{,}5\sqrt{5}$ D. $1-\sqrt{2}$

9. Niech przedział $(-\infty, 5\rangle$ będzie przestrzenią. Dopełnieniem przedziału $(-\infty, 1\rangle$ w tej przestrzeni jest przedział:

A. $(1, 5\rangle$ B. $\langle 1, 5\rangle$ C. $(1, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$

10. Dane są przedziały $A = \langle 0, 7)$, $B = (3, 9\rangle$ i $C = (5, 10)$. Najmniejszą liczbą naturalną należącą do zbioru $B - (A \cap C)$ jest liczba:

A. 0 B. 4 C. 5 D. 7

11. Jeśli w wyniku podzielenia liczby całkowitej a przez 5 otrzymamy resztę 3, to dzieląc liczbę $4a$ przez 10 otrzymamy resztę:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

12. Równanie $x^2 = x$:

A. spełnia tylko liczba 1
B. spełnia tylko liczba 0
C. spełniają dwie liczby: 0 i 1
D. jest sprzeczne

13. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{1-4x}{2} + x > -0{,}5$ jest przedział:

A. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

14. Kilogram śliwek jest droższy od kilograma jabłek o 50%. Zatem kilogram jabłek jest tańszy od kilograma śliwek o:

A. 25% B. $33\frac{1}{3}\%$ C. 50% D. 75%

15. Liczba 3 jest przybliżeniem z niedomiarem liczby 3,2. Błąd względny tego przybliżenia jest równy:

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{15}$ C. 0,2 D. $6\frac{1}{5}$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

16. Dane są zbiory $A = \{x: x = a\sqrt{2}$, gdzie $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, $B = \{x: x = \frac{b}{\sqrt{2}}$, gdzie $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}\}$. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

17. Niech zbiór liczb całkowitych $\boldsymbol{Z}$ oznacza przestrzeń. Zbiory A i B są podzbiorami tej przestrzeni oraz $A = \{x: x \in \boldsymbol{N}$ i $x \leq 5\}$, $B = \{x: x \in \boldsymbol{Z}$ i $x > -3\}$. Wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$ b) $(A \cup B)'$ c) $A \cap B$
d) $(A \cap B)'$ e) $A' \cup B'$ f) $A' \cap B'$

18. Dane są zbiory: $A = \{x: x \in \boldsymbol{R}$ i $x \geq -2\}$, $B = \{x: x \in \boldsymbol{R}$ i $x < 8\}$, $C = \{x: x \in \boldsymbol{R}$ i $-5 < x \leq 1\}$, $D = \{x: x \in \boldsymbol{R}$ i $x < -3$ lub $x > 4\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiory:

a) $A - B$ b) $A \cup C$ c) $B - C$
d) $B \cap D$ e) $D \cup A$ f) $C \cap D$

19. Dane są przedziały: $A = (-\infty, 4\rangle$, $B = \langle 1, 7)$, które są podzbiorami przestrzeni $\boldsymbol{R}$. Zapisz za pomocą przedziałów lub sumy przedziałów zbiory:

a) A' b) B' c) $(A \cup B)'$
d) $(A \cap B)'$ e) $B - A'$ f) $(A - B)'$

20. Zaznacz na osi liczbowej przedziały: $A = \left(-4, 3\frac{1}{2}\right\rangle$, $B = \left\langle \frac{1}{3}, 6\right\rangle$. Następnie podaj:

a) najmniejszą liczbę naturalną, która należy do zbioru $A \cup B$;
b) największą liczbę całkowitą, która należy do zbioru $B - A$;
c) przykład liczby niewymiernej, która należy do zbioru $A - B$;
d) przykład liczby wymiernej, która należy do zbioru $A \cap B$ i której odwrotność też należy do zbioru $A \cap B$.

21. Dany jest zbiór $A = \left\{-\sqrt{2{,}25}; -1\frac{3}{4}; -\frac{\pi}{2}; 2\frac{3}{8}; 2{,}(37); \sqrt{2}\right\}$.

a) Wypisz liczby niewymierne należące do zbioru A.
b) Ustaw liczby wymierne należące do zbioru A w kolejności od najmniejszej do największej.

22. Podaj przykład liczby:

a) wymiernej x, która spełnia warunek: $\frac{4}{13} < \frac{2}{13} - x < \frac{5}{13}$

b) niewymiernej y, która spełnia warunek: $2\sqrt{2} < \sqrt{2} + 4y < 3\sqrt{2}$.

23. Dane są liczby: $x = 0{,}2(5)$ oraz $y = 0{,}4(12)$. Znajdź rozwinięcie dziesiętne liczby $x + y$.

24. Dane są przedziały liczbowe: $A = \langle -2, 4 \rangle$, $B = \langle 1, 8)$. Sprawdź, która z liczb:

$$a = \frac{12+\sqrt{3}}{4}, \quad b = \frac{\left[4\frac{1}{3} - \left(8\frac{1}{3} - 5{,}4\right)\right] \cdot 0{,}25}{125 \cdot (-0{,}75) + 94{,}1}, \quad c = 0{,}124 \cdot 8{,}56 + 0{,}124 \cdot 1{,}44$$

należy do części wspólnej tych przedziałów.

25. Oblicz:

a) $\left|2 - \sqrt{5}\right| - \left|\sqrt{5} - 1\right|$

b) $4 \cdot |0{,}5\pi - 1{,}57| - |2\pi - 6{,}3|$

26. Dzień 11 listopada 2018 roku, w stulecie odzyskania niepodległości przez Polskę, wypadł w niedzielę. Jakim dniem tygodnia był dzień 11 listopada 1918 roku?

27. Dane są dwie kolejne liczby całkowite x i y, gdzie $x > y$. Liczba x w wyniku podzielenia przez 6 daje resztę 4. Wyznacz resztę z podzielenia liczby $3(x + y)$ przez:

a) 36

b) 12

c) 9.

28. Oblicz, jaką otrzymamy resztę z dzielenia liczby x przez liczbę y, jeśli:

a) $x = 6k - 2$, $k \in \mathbf{N}$; $y = 6$

b) $x = 3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$; $y = 3$

c) $x = 7k - 5$, $k \in \mathbf{N}$; $y = 7$

d) $x = 4k - 3$, $k \in \mathbf{N}$; $y = 4$

29. Rozwiąż równania:

a) $2x^2 = 8$

b) $(x + 1)(2x - 6) = 0$

c) $x^2 = 5x$

d) $2(1 - 3x) = 5 - 6x$

e) $(9 - x)^2 = 0$

f) $(3x - 2) \cdot 4 = \frac{24x + 6}{2} - 11$

g) $\frac{2x - 1}{x + 1} = 7$

h) $\sqrt{x^2 + 64} = 17$

i) $3\sqrt{x + 2} = 0$

30. Dane jest równanie z niewiadomą x. Wyznacz liczbę m, dla której liczba podana obok równania jest jego rozwiązaniem.

a) $3x(x - 4m) + x = 1{,}5x(2x + 6)$; $\frac{1}{2}$

b) $(1 - 2x)(x + m) = (3 + 2m)2x$; $\frac{1}{4}$

31. Iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych parzystych jest o 112 większy od kwadratu liczby mniejszej. Co to za liczby?

32. Rozwiąż nierówność i podaj najmniejszą liczbę całkowitą, która nie spełnia tej nierówności.

$$x - \frac{3(x-1)}{6} > 3x + 5\frac{1}{2}$$

33. Rozwiąż nierówność i podaj największą liczbę całkowitą parzystą, która spełnia tę nierówność.

$$2x + 3(1-2x) \geq \frac{8x+10}{4}$$

34. Wyznacz liczbę, której 16% jest liczbą o 9 mniejszą od $33\frac{1}{3}\%$ liczby 630.

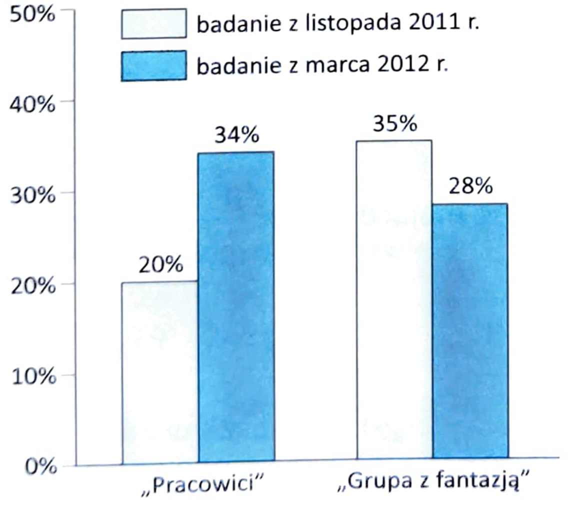
35. Czapka i szalik kosztują tyle samo. Jeśli czapka stanieje o 4%, a szalik zdrożeje o 12%, to o ile procent więcej niż obecnie trzeba będzie zapłacić za dwie czapki i jeden szalik?

36. Pan Goździk założył roczną lokatę o stałym oprocentowaniu w wysokości 25 000 zł. Po roku bank dopisał odsetki pomniejszone o 20% podatku dochodowego i wówczas pan Goździk miał na lokacie 26 400 zł. Oblicz:

a) oprocentowanie tej lokaty

b) kwotę podatku dochodowego.

37. W wyborach do samorządu szkolnego, które odbyły się w czerwcu 2012 r., startowały dwie grupy uczniów: „Pracowici" oraz „Grupa z fantazją". Poparcie dla obu grup w roku szkolnym 2011/2012 na podstawie dwóch przeprowadzonych sondaży przedstawia wykres poniżej.



Wyraź w procentach i w punktach procentowych zmianę poparcia dla obu grup startujących w wyborach.

38. Zapisz liczby $a = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ oraz $b = 0{,}3(6)$ w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych.

a) Porównaj liczby a i b.
b) Podaj przybliżenie dziesiętne każdej z liczb a, b z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.
c) Oblicz błąd bezwzględny każdego z powyższych przybliżeń (podaj ten błąd w postaci ułamka zwykłego) dla każdej z liczb a i b.

39. Przybliżenie pewnej liczby z niedomiarem jest równe 14, a błąd procentowy tego przybliżenia wynosi 12,5%. Wyznacz tę liczbę.

40. Oszacuj liczbę $\sqrt{3}$ z dokładnością do 0,1. Następnie wykaż (bez użycia kalkulatora), że liczba $\dfrac{5\sqrt{3}-6{,}5}{2}$ należy do przedziału $\left(1, 1\dfrac{1}{4}\right)$.

41. Największy wspólny dzielnik dwóch liczb jest równy 24, a najmniejsza wspólna wielokrotność tych liczb wynosi 432. Wyznacz te liczby.

42. Wyznacz liczbę naturalną mniejszą od 1000, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 9, a przy dzieleniu przez 21 – resztę 20.

43. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną, która w wyniku podzielenia przez 15 daje resztę 13, a w wyniku podzielenia przez 13 daje resztę 11.

44. Wyznacz wszystkie wartości m, gdzie $m \in \boldsymbol{Z} - \{0\}$, dla których liczba mająca postać $\dfrac{4m-15}{m}$ jest naturalna.

45. Wyznacz liczby pierwsze mające postać $\dfrac{p^2+30}{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą.

2. Wyrażenia algebraiczne

Potęga o wykładniku naturalnym

2.1. Porównaj liczby:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ i $\frac{1}{2^3}$ b) $\frac{3^2}{4}$ i $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ i $-\left(\frac{2}{5}\right)^3$

d) -6^4 i $(-6)^4$ e) $-\frac{1}{7^3}$ i $-\left(-\frac{1}{7}\right)^3$ f) $-\frac{1}{2^0}$ i $(-1)^{25}$

2.2. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $-4^2 \cdot (-4)^3$ b) $(0,2)^3 \cdot (0,2)^3$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(6\frac{1}{4}\right)^3$

d) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^7 \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right)^7$ e) $(1,8)^4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^4$ f) $(-2,8)^6 \cdot \left(\frac{25}{49}\right)^3$

2.3. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $\left(1\frac{1}{2}\right)^8 : (-1,5)^6$ b) $(-0,4)^{11} : \left(-\frac{2}{5}\right)^8$ c) $(0,7)^4 : \left(\frac{21}{100}\right)^4$

d) $\left(-3\frac{1}{5}\right)^3 : \left(1\frac{3}{5}\right)^3$ e) $\left(2\frac{1}{7}\right)^2 : \left(\frac{45}{49}\right)^2$ f) $(-0,25)^{10} : \left(-\frac{10}{4^{10}}\right)$

2.4. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 2:

a) $4^5 \cdot 8^2 : 2^9$ b) $(2^{19} \cdot 2^{13})^3 \cdot 128$ c) $(32^3)^5 : 64^4$

d) $16^{11} : (4 \cdot 2^4)^3$ e) $(14^3 : 7^3)^5 \cdot 4$ f) $[(0,4)^5 : (0,8)^5]^6 \cdot 16^9$

2.5. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 3:

a) $81 \cdot 27$ b) $243^2 : 9^3$ c) $(3^5 \cdot 9)^2 \cdot 81$

d) $(33^3 : 11^3)^2 : 27^2$ e) $(9^3 \cdot 243)^5 : 729^6$ f) $(18^2 \cdot 81^3)^2 : (4 \cdot 3^{15})^2$

2.6. Wpisz w kratkę odpowiedni wykładnik potęgi:

a) Średnica Słońca wynosi 1 390 000 km, czyli $1,39 \cdot 10^{\square}$ km.

b) Ziemia jest oddalona od Słońca o 150 milionów kilometrów, czyli o $1,5 \cdot 10^{\square}$ km.

c) Neptun jest oddalony od Słońca o około 4,5 miliarda kilometrów, czyli $0{,}45 \cdot 10^{\square}$ km.

d) Odległość między Słońcem a Jowiszem wynosi 778 milionów kilometrów, czyli $77{,}8 \cdot 10^{\square}$ km.

2.7. Wyznacz n, jeśli:

a) $2{,}7 \cdot 10^n = 2700000$

b) $0{,}0121 \cdot 10^n = 12100000$

c) $5{,}004 \cdot 10^n = 50040$

d) $0{,}00005 \cdot 10^n = 5000$

2.8. Zapisz daną liczbę w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $n \in \mathbf{N}$:

a) 150

b) 10000

c) 37000

d) 423100

e) 10,04

f) $2^7 \cdot 5^6$

g) $3^5 \cdot 100^4$

h) $5^6 \cdot 4^4 \cdot (10^3)^2$

2.9. Oblicz:

a) $\dfrac{3^2+(-2)^3}{(-4)^2} : \dfrac{1}{16}$

b) $\left[\left(\dfrac{0{,}75}{0{,}25}\right)^2 - \dfrac{(0{,}5)^3}{(-0{,}125)^2}\right]^2$

c) $\left(1\dfrac{5}{9}\right)^2 \cdot (-0{,}375)^3 \cdot \dfrac{3^2}{14} \cdot \left(-5\dfrac{1}{3}\right)^3$

d) $(-0{,}027)^5 \cdot (-3{,}5)^2 - 12\dfrac{1}{4} \cdot (-0{,}027)^5$

2.10. Oblicz:

a) $\dfrac{(1024-2^7)\cdot 343}{2^7 \cdot 7^5}$

b) $\dfrac{(9\cdot 5^{12}-5^{13})\cdot 8^3}{2^9 \cdot 625^3}$

c) $\dfrac{1080\cdot 6^4+6^7}{(6^3)^2}$

d) $\dfrac{(5^{20}+5^{18})\cdot(3^4)^3}{(5^{16}+5^{14})\cdot 9^5}$

e) $\dfrac{7^{12}\cdot 3+4\cdot 7^{12}}{(7^{12}:7^8)^3}$

f) $\dfrac{8\cdot 3^4\cdot 3^{11}-9\cdot 3^{12}}{46\cdot(3^{18}:3^4)}$

2.11. Wykaż, że liczba:

a) $5^{13}+5^{14}+5^{15}$ jest podzielna przez 31;

b) $3^{25}+3^{26}+3^{27}+3^{28}$ jest podzielna przez 40;

c) $4^{2018}+4^{2019}+4^{2020}$ jest wielokrotnością liczby 14;

d) $6^{20}+3\cdot 6^{19}-4\cdot 6^{18}$ jest wielokrotnością liczby 100.

2.12. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci potęgi o podstawie a $(a \neq 0)$:

a) $\dfrac{(a^3\cdot a^4)^3\cdot(a^2)^5}{(a^3\cdot a^2)^3}$

b) $\dfrac{(a^8:a^5)^1:a^4}{(a^9)^2:a^{21}}$

c) $\dfrac{(a^7\cdot a^3)^2}{a^5:\left[(a^3)^3\cdot a^5\right]^2}$

2.13. Rozwiąż równania:

a) $2^{17} \cdot x - 16^4 \cdot 3 = 5 \cdot (4^8 \cdot x - 3 \cdot 2^{17})$ b) $27^3 \cdot 2x - 3^9 = 3^{10} \cdot x + 2 \cdot 3^9$

c) $3^{13} \cdot x - 4 \cdot 9^6 = 27^4 \cdot (2x - 5)$ d) $(4^5 \cdot x + 32^2) \cdot 2^5 = 2^{16} \cdot x$

e) $\frac{x}{2^5} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot x + \frac{1}{2^3}$ f) $\frac{x}{4^4} - \frac{1}{(-2)^6} = -\left(-\frac{1}{16}\right)^2$

2.14. Wykonaj dane działania. Następnie oblicz wartość wyrażenia dla $x = 3$.

a) $[(4x^4)^5 : (2x^2)^7]^2 : (2x^3)^3$ b) $[(3x^2)^7 : (9x^2)^4]^3 : (9x^2)^2$

Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej

2.15. Oblicz:

a) $\sqrt{49}$ $\sqrt{81}$ $\sqrt{121}$ $\sqrt{1,69}$

b) $\sqrt[4]{81}$ $\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[8]{256}$ $\sqrt[6]{729}$

c) $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{-216}$ $\sqrt[5]{100000}$

2.16. Oblicz:

a) $\sqrt{13^2}$ b) $\sqrt{(-5)^4}$ c) $\sqrt[3]{(-8)^3}$ d) $\sqrt[3]{(-7)^6}$

2.17. Oblicz, stosując odpowiednie prawo działań na pierwiastkach:

a) $\sqrt{196 \cdot 25}$ $\sqrt{36 \cdot 121}$ $\sqrt{1,69 \cdot 9}$ $\sqrt{1,44 \cdot 0,49}$

b) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$ $\sqrt[3]{-64 \cdot 216}$ $\sqrt[3]{0,001 \cdot (-343)}$ $\sqrt[3]{-0,027 \cdot (-512)}$

c) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ $\sqrt[4]{-81 \cdot (-10000)}$ $\sqrt[5]{-32 \cdot 243}$ $\sqrt[6]{64 \cdot 729}$

2.18. Stosując odpowiednie prawo działań na pierwiastkach, oblicz:

a) $\sqrt{1:4}$ $\sqrt{4:25}$ $\sqrt{\frac{16}{81}}$ $\sqrt{\frac{49}{100}}$

b) $\sqrt[3]{64:(-125)}$ $\sqrt[3]{(-8):27}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$ $\sqrt[3]{\frac{343}{8000}}$

c) $\sqrt[4]{(-1):(-16)}$ $\sqrt[4]{81:16}$ $\sqrt[5]{\frac{32}{3125}}$ $\sqrt[5]{\frac{-243}{100000}}$

2.19. Oblicz:

a) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ b) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$ c) $\sqrt{18\frac{7}{9}}$ d) $\sqrt{7\frac{9}{16}}$

2.20. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{0{,}001}$ b) $\sqrt[3]{-0{,}216}$ c) $\sqrt[5]{-0{,}00032}$ d) $\sqrt[6]{0{,}000729}$

e) $\sqrt{0{,}16}$ f) $\sqrt[4]{(-0{,}81)^2}$ g) $\sqrt[6]{0{,}04^3}$ h) $\sqrt[3]{-0{,}5^6}$

2.21. Oblicz:

a) $2\sqrt{36}-4\sqrt[5]{32}+2\sqrt{3\cdot 27}$

b) $4\sqrt[3]{0{,}125}+2\sqrt{9\cdot 16}-5\sqrt[4]{625}$

c) $2\sqrt[3]{-64}-7\sqrt[6]{64}-5\sqrt[5]{-32}$

d) $10\sqrt[7]{0{,}0000128}+6\sqrt[5]{-0{,}00243}-6$

e) $6\sqrt{2\cdot 5\cdot 8\cdot 5}-\sqrt[3]{-32\cdot 9\cdot(-6)}-3$

f) $\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{(-6)\cdot(-4)}+2+2\sqrt[3]{-45\cdot 75}$

g) $5\sqrt{150}:\sqrt{6}+\sqrt[5]{64:(-2)}\cdot\sqrt[3]{2^7:16}$

h) $4\sqrt[4]{3^8}:\sqrt[3]{-2^3}:\sqrt{(-0{,}08):(-2)}\cdot\sqrt[3]{-0{,}1^6}$

2.22. Oblicz:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{13{,}5}$ c) $\sqrt[4]{162}\cdot\sqrt[4]{0{,}5}$ d) $\sqrt[5]{0{,}32}:\sqrt[5]{1000}$

2.23. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{18}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{63}$ $\sqrt{162}$

b) $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{81}$ $\sqrt[3]{500}$ $\sqrt[3]{192}$ $\sqrt[3]{135}$

c) $\sqrt[4]{64}$ $\sqrt[4]{243}$ $\sqrt[5]{320}$ $\sqrt[5]{2048}$ $\sqrt[6]{576}$

2.24. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a) $2\sqrt{5}$ $3\sqrt{6}$ $5\sqrt{11}$ $2\sqrt{17}$ $4\sqrt{10}$

b) $3\sqrt[3]{2}$ $2\sqrt[3]{3}$ $5\sqrt[3]{5}$ $4\sqrt[3]{7}$ $10\sqrt[3]{6}$

c) $5\sqrt[4]{3}$ $4\sqrt[4]{4}$ $2\sqrt[5]{6}$ $3\sqrt[5]{8}$ $2\sqrt[7]{5}$

2.25. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sqrt{32}+\sqrt{72}-\sqrt{50}$

b) $\sqrt{12}+\sqrt{243}-\sqrt{108}$

c) $\sqrt{80}-\sqrt{125}+\sqrt{500}$

d) $\sqrt{28}-\sqrt{175}+\sqrt{252}$

e) $\sqrt{242}-\sqrt{300}+\sqrt{338}-\sqrt{48}$

f) $\sqrt{800}+\sqrt{80}-\sqrt{200}+\sqrt{500}$

g) $\sqrt{12}+\sqrt{75}+\sqrt{24}+\sqrt{96}$

h) $\sqrt{392}-\sqrt{150}+\sqrt{578}-\sqrt{486}$

2.26. Skróć ułamki:

a) $\frac{2+4\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{6-3\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{-4+3\sqrt{28}}{8}$ d) $-\frac{2+\sqrt{8}}{2}$

e) $-\frac{5-2\sqrt{50}}{5}$ f) $\frac{\sqrt{12}-2\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ g) $\frac{\sqrt{8}-4}{\sqrt{2}-2}$ h) $\frac{5+\sqrt{6}}{\sqrt{24}+10}$

2.27. Wykonaj działania. Jaką liczbą: wymierną czy niewymierną jest wynik obliczeń?

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ b) $\left(\sqrt{5}-2\right)\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

c) $\left(2\sqrt{2}-3\right)-\left(3+2\sqrt{2}\right)$ d) $\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

e) $5\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)+6\sqrt{3}:2+4\sqrt{3}$ f) $\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

g) $\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\sqrt{5}$ h) $\frac{4\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+1$

2.28. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{-432}+\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{-192}-\sqrt[3]{-81}$

c) $\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}$ d) $\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$

e) $2\sqrt[3]{-125}+2\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{-250}$ f) $\sqrt[4]{16}-2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{-(-2)^5}$

g) $\sqrt{6\sqrt{162\cdot 32}\cdot\sqrt[3]{54}}-\sqrt[6]{128}$ h) $\sqrt[3]{10\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{250\cdot 2^2}}+\sqrt[3]{-2}$

2.29. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\sqrt{9\cdot 16+9\cdot 4+9\cdot 5}$ b) $\sqrt{25\cdot 9+14\cdot 25+2\cdot 25}$

c) $\sqrt[3]{27\cdot 2+27\cdot 9+27\cdot 16}$ d) $\sqrt[3]{15\cdot 64+64\cdot 3+9\cdot 64}$

e) $\sqrt{33^2+44^2}$ f) $\sqrt{15^2\cdot 3^2+4^2\cdot 15^2}$

g) $\sqrt{12^2\cdot 5^2-12^2\cdot 4^2}$ h) $\sqrt[4]{11^2\cdot 9^2+11^2\cdot 6^2+2^2\cdot 121}$

2.30. Porównaj liczby, nie używając kalkulatora:

a) $\sqrt{2}-1{,}4$ i $1{,}4-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}-1\frac{3}{4}$ i $1\frac{3}{4}-\sqrt{3}$

c) $3-\sqrt[3]{-5}$ i $\sqrt[3]{5}+3$ d) $-1-\sqrt[5]{-1}$ i $\sqrt[5]{-2^5}$

e) $\sqrt{3}$ i $\sqrt[4]{9}$ f) $2\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[6]{128}$

g) $\sqrt{10}$ i $\sqrt[6]{1000}$ h) $2-\sqrt[5]{-7}$ i $2-\sqrt[10]{(-7)^2}$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

2.31. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych:
a) sumę potrojonej zmiennej x i podwojonej zmiennej y
b) podwojoną sumę liczby a i połowy liczby b
c) różnicę liczby a i potrojonej sumy zmiennych x i y
d) kwadrat różnicy zmiennych x i y
e) sumę kwadratu liczby a i sześcianu liczby b
f) sześcian różnicy kwadratów zmiennych x i y.

2.32. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych:
a) iloczyn liczby a i kwadratu liczby b
b) iloczyn sześcianu zmiennej x i ilorazu zmiennej x przez y
c) iloraz sumy liczb a i b przez różnicę liczb c i d
d) różnicę iloczynu liczb a, b i sześcianu liczby c
e) pierwiastek kwadratowy z sumy zmiennej x i połowy zmiennej y
f) sumę iloczynu zmiennych x, y i pierwiastka stopnia trzeciego z sumy kwadratów zmiennych x i y.

2.33. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia.
a) $3x-[5x-(2x-1)]$
b) $9m^2-(-1)\cdot[7m^2-2m-(m^2-3m)]$
c) $(2a^2-a+3)\cdot(-4a)+16(a^2-0{,}5)$
d) $(2x^2-5xy+4)\cdot 2xy-7xy$
e) $(-10x^3+5x^2-20x):(5x)+1$
f) $(-4x^2+12x^3y^2-16x^4y^3):(-4x^2)$

2.34. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci. Podaj konieczne założenia. Następnie oblicz ich wartość dla podanych wartości zmiennych:
a) $8\cdot\left(\frac{3}{4}x-1\right)+(-15x^2+5x):(-5x)-(-3x+2)\cdot(-1);$ $\quad x=\frac{1}{3}$
b) $-4\cdot\left(\frac{1}{4}x-\frac{5}{8}\right)+(16x^2-8x):(-4x)+(-1)\cdot(2+x);$ $\quad x=1{,}5$
c) $-2(3-a-a^2)+5(1+a-2a^2)-(9a^3-12a^2-3a):(-3a);$ $\quad a=-0{,}2$
d) $(12a^4b^4-9a^2b^3):(-3a^2b)-(2+3a^2b)\cdot b^2;$ $\quad a=-1,\ b=-2$

2.35. Wykonaj mnożenie:
a) $(x+1)(y-3)$
b) $(2-x)(4y+5)$
c) $(3x-5y)(7y+2x)$
d) $\left(8x-\frac{1}{2}y\right)(6x+2y)$
e) $(a-3)(2a-7)$
f) $(b+2)(4-5b)$
g) $(-y^2-1)(9-4y^2)$
h) $\left(\frac{5}{2}x-6\right)(-2x^2+1)$

2.36. Wykonaj mnożenie:

a) $5(x-4)(2x+3)$

b) $-2(2a+1)(4-3a)$

c) $-3\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{6}b\right)(2b-6)$

d) $8\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}y\right)(y+7)$

e) $\frac{2}{3}\left(x+\frac{3}{7}\right)(7x-15)$

f) $-\frac{1}{2}(3-5a)(4a+2)$

g) $\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)\left(y+\sqrt{8}\right)$

h) $\left(\sqrt{3}-b\right)(2b+1)$

2.37. Wykonaj działania:

a) $(2x+y)(x-3y)-x^2$

b) $-2y^2+(-2y+x)(x+5y)$

c) $4x-(4x+y)(1-2y)$

d) $(1+y-3x)(y+x)$

e) $(3x+2y+1)(2x-y)$

f) $(4y-3x)(4+3y+5x)$

2.38. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x-y)(2x+3y)+(x+2y)(-x+5y)$

b) $(x+y+1)(2x-y)+(-1)(x-1)(2x+3y)$

c) $-(x+5)(2x+y-3)+(4x-2y)(x-y+3)-2(x^2+y^2)$

d) $(3x+y)(x-5y)-x(x+4y-1)-2x(x-9y)$

e) $3-(2+3x)(4x-9)+(5-x)2x$

f) $2x(-x+7)-5(x+3)(6-4x)+(1-2x)(-1-x)$

2.39. Rozwiąż równania:

a) $(x-3)(x+2)+(5-x)(x+1)=0$

b) $(2x+1)(x-4)=2(1-x)(5-x)$

c) $4x-(x+5)(x-7)=x(1-x)$

d) $(x-2)(4+x)=(x+3)(x-1)$

e) $2+(2x-3)(x+1)=3x-2(5-x^2)$

f) $4(x+5)-0{,}5(x-3)(6-2x)=x^2+1$

g) $1-(2x-1)(x+3)+5(x+0{,}8)=0$

h) $(x-2)(x-5)+1\frac{3}{4}=x-\frac{32x-56}{4}$

2.40. Rozwiąż nierówności:

a) $5x(x-7)-2(x^2+1)\le(1-3x)(6-x)$

b) $1-(1-x)(-x-1)-2x>6-x^2$

c) $-2(7x-4)(x-7)\le 1+7(7-2x^2)$

d) $-4(x+2)(1+x)>2(1-2x^2)$

e) $2(1-3x)(4-x)+3(x+5)(1-2x)+50x\le 0$

f) $4x(6-x)+(4x-1)(x-3)-2{,}5(6-4x)<0$

g) $1-(x+7)(3+2x)+3(x-5)(4+x)\le x^2$

h) $2x(13-4x)-(3x-1)(1-2x)+0{,}5(4x^2+10)\ge 13$

2.41. Wyłącz liczbę (–1) poza nawias:

a) $-3x^2 - 5y$ b) $-x + 2y^2$ c) $2x + 7y$
d) $-1 - 4x$ e) $y^2 + 4y - 6$ f) $-x + y - 1$

2.42. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $3x - 6$ b) $12y + 20x$ c) $-10x^2 + 5x$
d) $x^2y - xy^2$ e) $9a^3 - 6a^2b$ f) $100a^3b^2 + 50a^2b$
g) $12x^2y^4 - 8x^4y^3$ h) $-21ba^4 + 35ab^5$ i) $-72x^5a^5 - 24a^2x^3$

2.43. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $(a + b)x + (a + b)y$ b) $(5 - x)a + (5 - x)b$
c) $(2a + b)y - 6(2a + b)$ d) $(4z + 3)x - (4z + 3)$
e) $x^2(10a - 1) - x(10a - 1)$ f) $(7b - 5a)(x + y) + (x - y)(7b - 5a)$
g) $3(x - 4)x - (x - 4)$ h) $(2y + 3) + 2(2y + 3)y^2$

2.44. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $(3x + 7)x - (7 + 3x)x^2$ b) $y^3(4y + 3) + (3 + 4y)y$
c) $(a - b)z + 5(b - a)$ d) $3x(2a - 5b) - x^2(5b - 2a)$
e) $(2x - 1)y + (1 - 2x) - z(1 - 2x)$ f) $x^2(4 - x) - x(x - 4) + (4 - x)$
g) $3(7x - 3)x^2 + 6x(3 - 7x)$ h) $(2y - 6)y - 2(y - 3)y^2$

2.45. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias:

a) $(4x + 3)x - 5(8x + 6)$ b) $2(3x + 5)x + 4(3x + 5)$
c) $(x - 6)(x + 1) + 2(x + 1)$ d) $3(x - 4) - (x - 4)(x - 1)$
e) $(1 - x)(x - 5) + (1 - x)(x + 3)$ f) $4x(3x - 8) - 8(x + 5)(3x - 8)$
g) $(1 - 5x)(x + 2) + (5x - 1)(8 - 2x)$ h) $3(5x + 2) - 3(2x + 1)(-5x - 2)$

2.46. Rozwiąż równanie:

a) $(x - 5)(x + 3) = 0$ b) $x^2 + 4x = 0$ c) $5x - x^2 = 0$
d) $7x = x^2$ e) $5x = -20x^2$ f) $-2x^2 = -8x$

2.47. Rozwiąż równania:

a) $(x - 3)x + 7(x - 3) = 0$ b) $2(x + 1) - x(x + 1) = 0$
c) $(x - 2) - x(x - 2) = 0$ d) $x(x + 5) = 3(x + 5)$
e) $-(x - 1)x = 9(x - 1)$ f) $(x + 2)(x + 3) - 5(x + 3) = 0$
g) $(x - 1)(x - 6) = -2x(x - 1)$ h) $(2x + 1)(x - 4) = 9(x - 4)$

Wzory skróconego mnożenia

2.48. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, oblicz:

a) 12^2 b) 21^2 c) 19^2 d) 18^2
e) 32^2 f) 98^2 g) 101^2 h) 49^2

2.49. Podaj wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch liczb a i b, następnie korzystając z tego wzoru, oblicz:

a) $101 \cdot 99$ b) $28 \cdot 32$ c) $47 \cdot 53$ d) $71 \cdot 69$
e) $198 \cdot 202$ f) $504 \cdot 496$ g) $1003 \cdot 997$ h) $580 \cdot 620$

2.50. Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $29^2 + (40 - 1) \cdot (40 + 1)$ b) $34^2 - (10 + 3)(10 - 3)$
c) $(20 - 7)(20 + 7) + 24^2$ d) $(30 - 6)(30 + 6) - 23^2$
e) $101^2 - 99^2$ f) $202^2 - 203^2$
g) $55^2 + 45^2$ h) $58^2 + 62^2$

2.51. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$ b) $\left(6+\sqrt{3}\right)^2$ c) $\left(2\sqrt{5}+1\right)^2$ d) $\left(3+2\sqrt{3}\right)^2$
e) $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{7}\right)^2$ f) $\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)^2$ g) $\left(6\sqrt{2}+2\sqrt{6}\right)^2$ h) $\left(7\sqrt{2}+3\sqrt{10}\right)^2$

2.52. Oblicz:

a) $\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ b) $\left(3-\sqrt{5}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{2}-4\right)^2$ d) $\left(\sqrt{7}-5\right)^2$
e) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$ f) $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)^2$ g) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{6}\right)^2$ h) $\left(2\sqrt{10}-5\sqrt{2}\right)^2$

2.53. Oblicz:

a) $\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ b) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$
c) $\left(4-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+4\right)$ d) $\left(3+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-3\right)$
e) $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)$ f) $\left(3\sqrt{5}-7\right)\left(3\sqrt{5}+7\right)$
g) $\left(1-4\sqrt{5}\right)\left(1+4\sqrt{5}\right)$ h) $\left(10\sqrt{6}+3\right)\left(10\sqrt{6}-3\right)$

2.54. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(x + 9)^2$ b) $(8 + y)^2$ c) $(2a + 3)^2$
d) $(4x + 5y)^2$ e) $\left(\sqrt{2}+b\right)^2$ f) $\left(3a+\sqrt{3}\right)^2$

2.55. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(5-b)^2$ b) $(a-4)^2$ c) $(3a-2b)^2$

d) $(7x-1)^2$ e) $\left(2\sqrt{2}-5x\right)^2$ f) $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{8}y\right)^2$

2.56. Korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia, oblicz:

a) $(x-10)(x+10)$ b) $(y+11)(y-11)$

c) $(4x+2y)(4x-2y)$ d) $\left(1-\sqrt{5}x\right)\left(1+\sqrt{5}x\right)$

e) $(13x+14y)(13x-14y)$ f) $\left(\sqrt{3}a-\sqrt{6}b\right)\left(\sqrt{3}a+\sqrt{6}b\right)$

2.57. Zapisz za pomocą sum algebraicznych wyrażenia:

a) $(x^2-7)^2$ b) $(-4x+3y)^2$ c) $(-2a-5b)^2$

d) $(-3x+7y)(3x+7y)$ e) $(-x^2+1)(-x^2-1)$ f) $[6a+(-5b)]^2$

g) $\left(-3x+\sqrt{3}\right)\left(3x+\sqrt{3}\right)$ h) $\left(5-\sqrt{5}x\right)\left(\sqrt{5}x-5\right)$ i) $\left(x^3+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}-x^3\right)$

2.58. Uprość wyrażenie:

a) $(1-x)(1+x)(1+x^2)$

b) $5y^2-3(y+1)(y-1)$

c) $7(z^2-2)-4(z+3)(z-3)$

d) $10(a^2-15)-12(a-4)(a+4)$

e) $2(a-b)^2-2(a+b)^2+4(a+b)(a-b)$

f) $(m+1)^2-(2m-2)^2+(2m+3)^2-(4m-4)^2$

g) $2(3-x)(1+x)-(1-2x)^2+(-2-x)^2$

h) $9^2-(1-x)(2+x)-3(5-x)^2$

2.59. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych obok wartości zmiennych:

a) $(4+3y)(4-3y)-(4-y)^2$ $y=0{,}5$

b) $(3x+1)(3x+1)+(1+5x)(1-5x)$ $x=0{,}1$

c) $(a+0{,}2)^2-(a-0{,}2)^2$ $a=50$

d) $16(0{,}25+0{,}5b)(0{,}25-0{,}5b)-4(2b-1)^2-16b$ $b=-\sqrt{2}$

e) $(2a-b)^2-\left(\frac{1}{2}a-1\right)\left(\frac{1}{2}a+1\right)-(4a^2+b^2);$ $a=0{,}2$ $b=-0{,}25$

f) $3(1-3x)^2+(-1)(3x-5)(5+3x)-2(3x+2)^2;$ $x=\frac{1}{6}$

g) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2b}\right)(3+2b)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2b}\right);$ $b=\sqrt{3}$

h) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3x}\right)(2+3x);$ $x=2\sqrt{2}$

2.60. Rozwiąż równania:

a) $(x-1)^2-(x+4)^2=-2x+1$
b) $(x+5)^2-(x-3)^2=x+1$
c) $(x+1)^2+(x-3)(x+3)-2=2(x-1)^2$
d) $(2-x)(2+x)+(x+3)^2=x-7$
e) $(x+3)^2-(4-x)(4+x)=2(x-1)^2+1$
f) $(x-5)^2-(x-3)^2=4(x-2)$
g) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)-\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)-\sqrt{12}=0$
h) $\left(x+2\sqrt{5}\right)^2+\left(x-2\sqrt{5}\right)^2=46$

2.61. Rozwiąż nierówności:

a) $2(x-1)^2-(x+3)^2\le x(x-2)+1$
b) $(x+4)^2-(x+1)^2\ge 4(x-1)$
c) $2(x-5)^2-3(x+2)^2<6-x^2$
d) $(x-2)^2-(x+5)(x-5)>-4(x+5)$
e) $x(x-1)+(2-x)(2+x)<-x+3$
f) $4(x-1)(x+1)-(2x-1)^2>3$
g) $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(x+\sqrt{2}\right)^2<0$
h) $(2-x)^2-5\ge\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

2.62. Rozłóż wyrażenia na czynniki, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia:

a) x^2+2x+1
b) $9-6x+x^2$
c) $4x^2+4x+1$
d) $y^2-8y+16$
e) $49+14y+y^2$
f) $-2mn+m^2+n^2$

2.63. Rozłóż wyrażenia na czynniki, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia:

a) b^2-36
b) $49-y^2$
c) $4x^2-25y^2$
d) m^2-16n^2
e) a^2b^2-2
f) $9-x^4y^2$

2.64. Rozłóż wyrażenia na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia:

a) $(5p+3q)^2-25$
b) $(2a+3b)^2-c^4$
c) $(m-9n)^2-9m^2$
d) $a^2-(x+y)^2$
e) $4-(2a-3b)^2$
f) $1-(b^2+c^2)^2$

2.65. Rozłóż wyrażenia na czynniki, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia:

a) x^4-25
b) $9-x^4$
c) $81x^4-1$
d) $16x^4-625$
e) $256x^4-81$
f) x^4-2

2.66. Rozłóż wyrażenia na czynniki, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) x^4-2x^2+1
b) x^4+6x^2+9
c) x^4-18x^2+81
d) $16-8x^2+x^4$
e) $625-50x^2+x^4$
f) x^4-10x^2+25

2.67. Rozłóż wyrażenia na czynniki:

a) $25a^2-(b-2)^2$ b) $9x^2-(x-2)^2$
c) $(2x+1)^2-(x+5)^2$ d) $(x-7)^2-(4-3x)^2$
e) $25(x-1)^2-9(2+x)^2$ f) $4(x+3)^2-49(1-x)^2$

2.68. Rozłóż wyrażenia na czynniki:

a) $2x^3-2x$ b) $16x-9x^3$ c) x^3-4x^2+4x
d) x^3+2x^2+x e) $36y+12xy+x^2y$ f) $8yx^2-8yx+2y$

2.69. Rozwiąż równania:

a) $x^2-4x+4=0$ b) $x^2-9=0$
c) $49+14x+x^2=0$ d) $0{,}25x^2-1=0$
e) $10x-x^2=25$ f) $25x^2-81=0$
g) $-16x=64x^2+1$ h) $-0{,}36x^2+0{,}49=0$

2.70. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$ d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-3}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ f) $\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+4}$ g) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$ h) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}$

2.71. Usuń niewymierność z mianownika ułamka:

a) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ b) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+2}$ d) $\dfrac{3\sqrt{6}-6}{3-6\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{3-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$ g) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ h) $\dfrac{3\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3\sqrt{15}}$

2.72. Sprawdź, czy liczba b jest odwrotnością liczby a:

a) $a=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ $b=\sqrt{7}+\sqrt{6}$ b) $a=\sqrt{3}-2$ $b=\sqrt{3}+2$
c) $a=2\sqrt{3}+\sqrt{11}$ $b=2\sqrt{3}-\sqrt{11}$ d) $a=\sqrt{5}-\sqrt{6}$ $b=-\sqrt{5}-\sqrt{6}$
e) $a=\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ $b=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ f) $a=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ $b=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

2.73. Przedstaw odwrotność danej liczby w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi i $c \geqslant 0$.

a) $3-2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}-4$ c) $5+\sqrt{5}$ d) $2+3\sqrt{2}$
e) $9-\sqrt{6}$ f) $4\sqrt{3}-7$ g) $2\sqrt{7}-6$ h) $6\sqrt{2}+9$

D **2.74.** Wykaż, że podane liczby są liczbami całkowitymi:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}-\frac{12}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{2\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+3}-\sqrt{32\frac{2}{3}}$

d) $\frac{1}{3+\sqrt{6}}+\frac{1}{3-\sqrt{6}}$

e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

2.75. Wiadomo, że:

a) $a^2+b^2=25$ oraz $ab=12$. Oblicz $(a-b)^2$ oraz $|a+b|$.

b) $a^2+b^2=130$ oraz $(a+b)^2=225$. Oblicz ab oraz $(a-b)^2$.

c) $a^2-b^2=36$ oraz $a-b=2$. Oblicz $a+b$ oraz a i b.

d) $(a+b)^2=225$, $(a-b)^2=121$ oraz $a>b$. Oblicz ab oraz a^2-b^2.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

2.76. Oblicz:

a) 5^{-1} $\quad -2^{-3}$ $\quad (-3)^{-2}$ $\quad -4^{-4}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ $\quad \frac{2^{-2}}{3}$ $\quad \frac{2}{7^{-1}}$ $\quad \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

c) $(0{,}1)^{-4}$ $\quad (0{,}3)^{-3}$ $\quad (-0{,}2)^{-2}$ $\quad (-0{,}4)^{-1}$

d) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$ $\quad \left(-2\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $\quad \left(-3\frac{1}{4}\right)^{-2}$ $\quad \left(4\frac{1}{5}\right)^{-1}$

2.77. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $3^{-3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}$

b) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-2}$

c) $5^{-1}\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^{-1}$

d) $6^{-2}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

f) $\left(1\frac{1}{6}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$

g) $(2{,}8)^{-4}\cdot\left(\frac{5}{14}\right)^{-4}$

h) $\left(5\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot(0{,}75)^{-3}$

2.78. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $3^{-2} \cdot 3^4$
b) $5^2 \cdot 5^{-6}$
c) $4^{-4} \cdot 4^2$
d) $2^{-8} \cdot 2^5$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$
f) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5$
g) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-8}$
h) $(2{,}6)^{-4} \cdot (2{,}6)^3$

2.79. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $(3^{-2})^{-3} : 3^8$
b) $(4^{-5})^{-2} : 4^9$
c) $(5^{-1})^{-3} : 5^6$
d) $(2^2)^{-4} : 2^{-6}$
e) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right]^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^6$
f) $\left[\left(2\frac{1}{5}\right)^{-3}\right]^3 \cdot \left(2\frac{1}{5}\right)^7$
g) $[(4{,}2)^{-1}]^{-8} \cdot (4{,}2)^{-6}$
h) $[(3{,}4)^{-5}]^{-4} \cdot (3{,}4)^{-21}$

2.80. Oblicz, stosując prawa działań na potęgach:

a) $(0{,}6)^{-8} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-8}$
b) $\left(1\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-2}$
c) $(3{,}75)^{-3} \cdot (1{,}6)^{-3}$
d) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{-2} \cdot (4{,}5)^{-2}$
e) $(2{,}4)^{-3} : (0{,}6)^{-3}$
f) $(0{,}2)^{-2} : (0{,}5)^{-2}$
g) $\left(1\frac{5}{11}\right)^{-2} : \left(\frac{4}{11}\right)^{-2}$
h) $(3{,}6)^{-3} : (0{,}9)^{-3}$

2.81. Oblicz:

a) $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75$

b) $\dfrac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$

c) $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-(0{,}25)^{-1}\right]^{-2}}{(0{,}375)^{-1}-(0{,}6)^{-1}}$

d) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1}-(3^{-1}-2^{-1})^{-2}}{\left(\frac{2}{21}\right)^{-1}}$

2.82. Zapisz liczby w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $k \in \mathbb{Z}$:

a) 4100
b) 1015000
c) 274500000
d) 90000000
e) 0,05
f) 0,234
g) 0,0000657
h) 0,00030405

2.83. Zapisz wynik obliczeń w postaci $a \cdot 10^k$, gdzie $a \in \langle 1, 10)$ i $k \in \mathbf{Z}$:

a) $(2{,}5 \cdot 10^{21}) \cdot (4 \cdot 10^{-3})$
b) $(1{,}2 \cdot 10^{-25}) \cdot (0{,}5 \cdot 10^{27})$
c) $2{,}1 \cdot 10^{15} + 11{,}9 \cdot 10^{15}$
d) $17{,}9 \cdot 10^{-1} + 26{,}5 \cdot 10^{-2}$
e) $(52 \cdot 10^{-2} - 78 \cdot 10^{-3})$
f) $2{,}5 \cdot 10^{-3} - 35 \cdot 10^{-5}$
g) $(1{,}3 \cdot 10^{14}) : (2{,}6 \cdot 10^{10})$
h) $(2{,}4 \cdot 10^{-37}) : (0{,}06 \cdot 10^{-32})$

D **2.84.** Wykaż, że dane dwie liczby są równe:

a) $[(1^{-1} + 1^{-1})^{-1} + 1^{-1}]^{-1}$ oraz $[(2^{-1} + 2^{-1})^{-1} + 2^{-1}]^{-1}$

b) $[(4^{-1} + 4^{-1})^{-1} + 4^{-1}]^{-1}$ oraz $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

c) $[(6^{-1} + 6^{-1})^{-1} + 6^{-1}]^{-1}$ oraz $\left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right\}^{-1}$

D **2.85.** Wykaż, że dane dwie liczby są równe:

a) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ oraz $\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^{-1}$
b) $3 - 2\sqrt{2}$ oraz $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{-1}$
c) $2 - \sqrt{3}$ oraz $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}$
d) $4 + \sqrt{15}$ oraz $\left(4 - \sqrt{15}\right)^{-1}$

2.86. Wykonaj działania, wiedząc, że $x \neq 0$:

a) $(x^{-3} - 2x^{-2} + 3x^{-1} + 1)(x^{-1} - 1)$
b) $(-x^{-4} + 3x^{-2})(2x^{-3} + x^{-4})$
c) $(3x^{-2} - 3x^{-1} - 2)(x^{-3} + 1)$
d) $(x^{-1} - 2x^{-2})(2x^{-5} - 3x^{-2} + x)$

2.87. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych obok wartości zmiennych:

a) $\left(\frac{a^{-2}}{1 - a^{-2}} + \frac{b^{-2}}{1 - b^{-2}}\right)^{-2}$ dla $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$

b) $(1 + a^{-1})^{-2} + (1 - a^{-1})^{-2}$ dla $a = -\frac{1}{3}$

Potęga o wykładniku wymiernym

2.88. Oblicz:

a) $32^{\frac{1}{5}}$
b) $64^{\frac{1}{3}}$
c) $81^{\frac{1}{2}}$
d) $8^{-\frac{1}{3}}$
e) $25^{-\frac{1}{2}}$
f) $243^{-\frac{1}{5}}$

2.89. Oblicz:

a) $125^{\frac{2}{3}}$ b) $81^{\frac{3}{4}}$ c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$ e) $9^{-\frac{3}{2}}$ f) $\left(\frac{81}{625}\right)^{-0,75}$

2.90. Oblicz:

a) $2\cdot 16^{-1,5}\cdot 32^{1,2}$ b) $5^{-3}\cdot 125^{\frac{2}{3}}\cdot 625^{\frac{5}{4}}$

c) $\left[\left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{-3}{5}}\right]^{\frac{1}{4}}$ d) $\left(3^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-2}\right)^{\frac{3}{-4}}$

2.91. Oblicz:

a) $2\cdot(0,3)^{-1}+4\cdot 8^{\frac{2}{3}}-12\cdot 27^{-\frac{1}{3}}$

b) $625^{0,25}-1,5\cdot 100^{\frac{3}{2}}+0,25^{-2,5}$

c) $0,008^{-\frac{1}{3}}-(0,2)^{-2}\cdot 8+\left(12\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(-4)$

d) $\frac{1}{2}\cdot 216^{\frac{2}{3}}+\left(5,27^{-3}\right)^{0}-81^{0,75}\cdot(0,5)^{-1}$

e) $\left(0,125^{-\frac{2}{3}}\cdot 0,25^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(81^{0,5}\cdot 9^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}$

f) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{2}{3}}-1,5:\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{9}}\right\}\cdot 121^{\frac{5}{8}}$

2.92. Zapisz liczbę w postaci jednej potęgi o wykładniku wymiernym:

a) $5\sqrt{5\sqrt{5}}$ b) $4\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}}$ d) $36\cdot\sqrt[6]{6\sqrt{6}}$

2.93. Oblicz:

a) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}}+12^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$ b) $3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}+32^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

c) $5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}$ d) $72^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}+11^{\frac{1}{2}}\cdot 11^{\frac{1}{2}}$

e) $108^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\cdot 25^{\frac{1}{3}}$ f) $4^{\frac{1}{3}}\cdot 16^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}$

2.94. Przedstaw liczbę w postaci jednej potęgi:

a) $2\cdot 5^{1,5}+3\cdot 5^{1,5}$
b) $4\cdot 3^{0,25}-3^{0,25}$

c) $2\cdot 2^{\frac{5}{2}}+6\cdot 2^{2,5}$
d) $7\cdot 3^{-0,5}+2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$

e) $6\cdot 2^{0,6}-2^{1,6}$
f) $3^{\frac{5}{3}}+6\cdot 3^{\frac{2}{3}}$

2.95. Wykonaj wskazane działania i zapisz wynik w postaci potęgi liczby 2:

a) $\dfrac{4^3\cdot 16^{\frac{1}{4}}:\sqrt[5]{32}}{64^{-\frac{3}{4}}\cdot 8^{\frac{5}{3}}}$
b) $\dfrac{12\sqrt{32^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}+\left(6^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}\right)^2}$

2.96. Wykonaj wskazane działania i zapisz wynik w postaci potęgi liczby 5:

a) $\dfrac{5^{\frac{2}{3}}\cdot 125^{-\frac{5}{3}}:\sqrt[4]{625^2}\cdot\sqrt[12]{5}}{4\cdot 5^{\frac{3}{4}}+5^{\frac{3}{4}}}$
b) $\dfrac{15\cdot 5^{\frac{7}{6}}-50\sqrt[6]{0,2^{-1}}}{625^{-\frac{1}{6}}\cdot 5^{-\frac{4}{3}}:25^{-\frac{3}{2}}}$

2.97. Wykonaj wskazane działania i zapisz wynik w postaci potęgi liczby 3:

a) $\dfrac{9^{-0,25}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,75}:\sqrt[6]{27}}{3^{-\frac{2}{3}}\cdot 9^{-\frac{1}{3}}\cdot 81^{\frac{1}{6}}}$
b) $\dfrac{6\cdot 27^{0,25}+3^{1,75}}{\left[6\cdot 9^{-\frac{2}{3}}-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\right]^{-\frac{9}{4}}}$

2.98. Wiedząc, że przybliżenie liczby $10^{\frac{1}{3}}$ jest równe 2,154435, wyznacz przybliżenia liczb:

a) $10^{\frac{4}{3}}$
b) $10^{\frac{10}{3}}$
c) $10^{-\frac{2}{3}}$
d) $10^{-\frac{5}{3}}$

2.99. Wiedząc, że przybliżenie liczby $10^{0,25}$ jest równe 1,778279, wyznacz przybliżenia liczb:

a) $10^{\frac{9}{4}}$
b) $10^{-0,75}$
c) $10^{\frac{17}{4}}$
d) $10^{-\frac{11}{4}}$

2.100. Oblicz:

a) $(5^{0,5}-3^{0,5})(5^{0,5}+3^{0,5})$
b) $(7^{1,5}+2^{1,5})(7^{1,5}-2^{1,5})$

c) $(2^{2,5}+3^{0,5})(2^{2,5}-3^{0,5})$
d) $(3^{0,25}+3^{0,5})(3^{0,25}-3^{0,5})(3^{0,5}+3)$

2.101. Oblicz:

a) $\left(6^{0,5}+2^{0,5}\right)^2$ b) $\left(10^{0,5}-5^{0,5}\right)^2$

c) $\left(2^{1,5}-6^{0,5}\right)^2$ d) $\left(7^{1,5}+14^{0,5}\right)^2$

2.102. Oblicz:

a) $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ b) $\left[\left(6-20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(6+20^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

c) $\left[\left(6-11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(6+11^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ d) $\left[\left(7+24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(7-24^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

2.103. Oblicz:

a) $\left(3^{-1,5}+81^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3^{-\frac{3}{2}}-3^{-2}\right)$ b) $\left(25^{0,75}+625^{0,25}\right)\left((0,2)^{-\frac{3}{2}}-25^{0,5}\right)$

c) $\left[2^3-(0,5)^{-1,5}\right]\left[(0,125)^{-1}+2\sqrt{2}\right]$ d) $\left(343^{\frac{1}{3}}-7\sqrt{7}\right)\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}+7^{1,5}\right]$

Potęga o wykładniku rzeczywistym

2.104. Oblicz:

a) $\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}}\cdot 25^{\frac{3}{2}}:\sqrt[4]{625^5}$ b) $24\cdot 32^{-\frac{3}{5}}+\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\sqrt{8}$

c) $\left(64^{\frac{1}{6}}\cdot 1024^{-0,3}+0,25^{\pi}\right)^0\cdot\left(27^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\sqrt{2}}$ d) $\left(0,2^{-1}\cdot 5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}:\left(125^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\sqrt{3}}\right)$

2.105. Dane są przybliżone wartości pierwiastków:

$\sqrt{2}\approx 1,4$	$\sqrt{3}\approx 1,75$	$\sqrt{5}\approx 2,25$	$\sqrt[3]{2}\approx 1,25$	$\sqrt[3]{4}\approx 1,6$	$\sqrt[3]{6}\approx 1,8$

Oblicz, bez użycia kalkulatora, przybliżoną wartość potęgi:

a) $81^{\sqrt{5}}$ b) $1024^{\sqrt{2}}$ c) $0,0625^{\sqrt{3}}$

d) $32^{\sqrt[3]{6}}$ e) $0,0016^{\sqrt[3]{2}}$ f) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\sqrt[3]{4}}$

2.106. Korzystając z danych z poprzedniego zadania, oblicz przybliżoną wartość potęgi:

a) $256^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ b) $243^{\frac{\sqrt[3]{4}}{4}}$ c) $625^{\frac{1}{3}\sqrt{5}}$

d) $0{,}0001^{-\sqrt[3]{2}}$ e) $0{,}00032^{-\frac{1}{9}\sqrt[3]{6}}$ f) $100000^{-\frac{1}{7}\sqrt{2}}$

Określenie logarytmu

2.107. Oblicz:

a) $\log_3 243$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$ c) $\log 1000$ d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16}$

e) $\log_2 \frac{1}{1024}$ f) $\log_{\frac{1}{6}} 216$ g) $\log_5 625$ h) $\log_{\frac{1}{5}} 1$

2.108. Oblicz x, jeśli:

a) $\log_3 x = -1$ b) $\log_5 x = 3$ c) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$ d) $\log_{\frac{1}{3}} x = -\frac{1}{2}$

e) $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ f) $\log_4 x = 0$ g) $\log_2 x = 10$ h) $\log_{2\sqrt{2}} x = -3$

2.109. Oblicz x, jeśli:

a) $\log_x 25 = 2$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$ d) $\log_x 2 = \frac{1}{3}$

e) $\log_x \frac{1}{9} = -2$ f) $\log_x 64 = -3$ g) $\log_x 27 = 3$ h) $\log_x 36 = -2$

2.110. Oblicz:

a) $\log_{0,1} 0{,}01$ b) $\log_{1,1} 1{,}331$ c) $\log_{0,64} 0{,}8$ d) $\log_{0,125} 0{,}5$

e) $\log_{0,16} 0{,}064$ f) $\log_{0,2} 625$ g) $\log_{0,0016} 5$ h) $\log_4 0{,}0625$

2.111. Oblicz:

a) $\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt[3]{5}$ b) $\log_{\sqrt[3]{3}} 27$ c) $\log_2 8\sqrt{2}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} 81\sqrt{3}$

e) $\log_4 8\sqrt[4]{2}$ f) $\log_{\frac{1}{5}} 25\sqrt{5}$ g) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9}$ h) $\log_{2\sqrt{2}} 4\sqrt{8}$

D 2.112. Wykaż, powołując się na odpowiednie własności logarytmów, że podane liczby są równe:

a) $\log 125$ oraz $3\log 5$

b) $\log_5 12$ oraz $2\log_5 2 + \log_5 3$

c) $\log_7 12 - \log_7 2$ oraz $\log_7 6$

d) $5\log_9 2 + 2\log_9 \frac{1}{4}$ oraz $\log_9 2$

e) $3\log 3 + 2\log 2 - \log 6$ oraz $\log 18$

f) $\log_3 2$ oraz $-7\log_3 \frac{1}{2} - 3\log_3 4$

2.113. Wiedząc, że:

a) $\log_3 2 = a$ i $\log_3 7 = b$, oblicz $\log_3 14$

b) $\log_7 4 = a$ i $\log_7 3 = b$, oblicz $\log_7 36$

c) $\log_4 3 = a$ i $\log_4 5 = b$, oblicz $\log_4 1{,}8$

d) $\log_5 4 = a$ i $\log_5 27 = b$, oblicz $\log_5 6$

D 2.114. Wykaż, że:

a) $\log_6^2 2 + \log_6 4 \cdot \log_6 3 + \log_6^2 3 = 1$

b) $\log_5^2 10 - \log_5 10 \cdot \log_5 4 + \log_5^2 2 = 1$

2.115. Oblicz:

a) $2^{\log_2 7}$

b) $3^{\frac{1}{2}\log_3 16}$

c) $10^{2+\log 3}$

d) $5^{-1+2\log_5 4}$

e) $36^{\log_6 5 - \frac{1}{4}}$

f) $27^{\log_3 2 - \frac{1}{3}}$

g) $3^{2+\log_3 4}$

h) $2^{5-\frac{1}{3}\log_2 27}$

D 2.116. Wykaż, powołując się na odpowiednie własności logarytmów, że podane liczby są równe:

a) $\log_5 3$ oraz $\dfrac{1}{\log_3 5}$

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$ oraz 2

c) $\dfrac{4}{\log_2 10}$ oraz $\dfrac{1}{2}\log 4 + \log 8$

d) $\log 96^{0,25} - \dfrac{1}{4}\log\dfrac{2}{27}$ oraz $\dfrac{1}{\log_6 10}$

D 2.117. Wykaż, że $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{31} 32 = 5$.

2.118. Wiedząc, że:

a) $\log_5 4 = a$ i $\log_5 3 = b$, oblicz $\log_{25} 12$

b) $\log_3 4 = a$ i $\log_3 5 = b$, oblicz $\log_{27} 0{,}8$

Zastosowanie logarytmów

2.119. Oblicz stężenie molowe jonów wodorowych w roztworze, w którym:
a) $pH = 4$ b) $pH = 0$ c) $pH = 3,5$ d) $pH = 8,75$

2.120. Ile razy należy zwiększyć, lub zmniejszyć, stężenie jonów wodorowych w roztworze, aby:
a) pH wzrosło o 2 b) pH zmalało o 1.

2.121. W roztworze zwiększono 150 razy stężenie jonów wodorowych. O ile zmalało pH tego roztworu?

2.122. W roztworze zmniejszono 75 razy stężenie jonów wodorowych. O ile wzrosło pH tego roztworu?

2.123. Oblicz wartość pH kwasu solnego wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.124. Poziom natężenia hałasu w jadącym samochodzie osobowym jest równy 70 dB, a w pobliżu startującego samolotu odrzutowego wynosi 130 dB. Ile razy głośniej jest w pobliżu startującego samolotu odrzutowego niż w jadącym samochodzie osobowym?

2.125. Janek słuchał muzyki nadawanej przez radio. Gdy usłyszał ulubioną piosenkę, trzykrotnie zwiększył głośność radia. O ile decybeli wzrósł poziom natężenia dźwięku w pokoju Janka?

Zdanie. Zaprzeczenie zdania

2.126. Oceń wartość logiczną podanych zdań:
a) Liczba $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ jest większa od 3.
b) $3 + 7 = 10$
c) $-0,5 > -0,4$
d) Istnieje trójkąt o bokach długości 2 cm, 3 cm, 5 cm.
e) Liczba przekątnych pięciokąta jest równa liczbie jego boków.
f) Obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 3 i 4 jest równy 12.

2.127. Podaj zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń:

a) $\sqrt{3}$ jest liczbą całkowitą.

b) Liczba 1010 nie jest liczbą parzystą.

c) $5^2 = (-5)^2$

d) $-8 \cdot (-1) \neq 2 \cdot 4$

e) $-3^2 = 9$

f) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$

2.128. Podaj zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń:

a) $-3 : 2 > -7 : 2$

b) $4^2 + 5^2 < 6^2$

c) $-7^2 \geq (-7)^2$

d) $3 \cdot (1-8) \leq -3 \cdot (8-1)$

e) $0 \geq [-2-(-2)]^2$

f) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}} > \dfrac{2}{3}$

2.129. Zapisz zdanie, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną tego zdania. W przypadku zdania fałszywego podaj jego zaprzeczenie.

a) Liczba $2-\sqrt{5}$ jest dodatnia.

b) Liczba $\sqrt{(-1)^2}$ jest nieujemna.

c) Sześcian liczby 2 jest większy od kwadratu liczby (-3).

d) Nieprawda, że $\sqrt{0}$ jest równy 0.

e) Pierwiastek trzeciego stopnia liczby (-8) jest większy lub równy zerowej potędze liczby (-5).

f) Iloraz liczby 4 przez (-2) jest niemniejszy od iloczynu liczby 4 i (-2).

g) Kwadrat sumy liczb 2 i 5 jest mniejszy lub równy sumie kwadratów liczb 2 i 5.

h) Nieprawda, że druga potęga liczby 0,5 jest nie większa niż druga potęga liczby 0,3.

2.130. Oceń wartość logiczną podanych zdań i zapisz je, używając kwantyfikatorów i symboli matematycznych:

a) Każda liczba naturalna jest nieujemna.

b) Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której $x+\dfrac{1}{x}=2$.

c) Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej powiększony o 1 jest liczbą dodatnią.

d) Istnieje liczba całkowita, której trzecia potęga jest liczbą ujemną.

e) Istnieje liczba naturalna, której kwadrat pomniejszony o 3 jest mniejszy od -1.

f) Istnieje taka liczba całkowita, której kwadrat jest równy $\sqrt{3}$.

2.131. Oceń wartość logiczną podanych zdań. Następnie podaj zaprzeczenia tych zdań.

a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 + 2 > 0$

b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 = -1$

c) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{N}} \dfrac{1}{x} \in \boldsymbol{N}$

d) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{Q}} 5x \notin \boldsymbol{Q}$

e) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{Z}} \sqrt{x^2} = x$

f) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 = |x|^2$

Zdanie złożone. Zaprzeczenia zdań złożonych

2.132. Oceń wartości logiczne poniższych zdań, określając najpierw wartości logiczne zdań prostych, tworzących koniunkcję:

a) Trójkąt równoramienny ma trzy boki i środek symetrii.

b) $\sqrt{(-11)^2} = 11 \wedge \sqrt{0} = 0$

c) $(1+2)^2 = 1^2 + 2^2 \wedge 3 - 2 = (2-3)^2$

d) $\sqrt{5} > 2 \wedge \sqrt{33^2 + 44^2} = 55.$

2.133. Napisz koniunkcję zdań, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną koniunkcji.

a) Liczba 5 jest dodatnia i kwadrat liczby 5 jest mniejszy od 30.

b) Iloraz (-10) przez 2 jest mniejszy od -3 i sześcian liczby 6 nie równa się 216.

c) Dokładna wartość liczby π jest równa 3,14 i przybliżona wartość liczby $\sqrt{2}$ wynosi 1,41.

d) Kwadrat liczby 6 jest równy 36 i kwadrat liczby (-6) jest równy 36.

e) Trzecia potęga liczby $\sqrt{3}$ jest większa od 9 i $\sqrt{3}$ jest liczbą nieujemną.

f) Liczba $\sqrt{5}$ jest nie większa od liczby $\sqrt{6}$ i liczba $(-0{,}13)$ jest nie mniejsza od liczby $(-0{,}14)$.

2.134. Oceń wartości logiczne poniższych zdań, określając najpierw wartości logiczne zdań prostych, tworzących alternatywę:

a) Kwadrat jest rombem lub prostokątem.

b) $2 \cdot (-1) \neq -2 \cdot 1 \vee 0{,}1^2 \geq 0{,}1^3$

c) $\sqrt{4} = -2 \vee -2^2 = 4$

d) $\sqrt{341} > 18 \vee \sqrt{341} < 18.$

2.135. Napisz alternatywę zdań, używając symboli matematycznych. Oceń wartość logiczną alternatywy.

a) Iloczyn liczb $\left(\sqrt{3} - 1{,}73\right)$ oraz $(\pi - 3{,}14)$ jest równy 0 lub kwadrat liczby π jest nie większy od 7.

b) Suma liczb $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{12}$ jest równa podwojonej liczbie $\frac{1}{8}$ lub różnica liczb $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{12}$ jest różna od $\frac{1}{8}$.

c) Suma kwadratów liczb 5 i 12 jest równa kwadratowi liczby 13 lub różnica kwadratów liczb 10 i 8 jest równa kwadratowi liczby 6.

d) Różnica sześcianów liczb 0,1 i $(-0{,}1)$ jest większa od sześcianu różnicy tych liczb lub iloraz liczby 0,02 przez 0,0001 jest mniejszy od 200.

2.136. Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne zdań złożonych.

a) Kwadrat sumy liczb (-1) i (-2) jest liczbą nieujemną lub suma sześcianów liczb (-1) i (-2) jest liczbą mniejszą od 0.

b) Suma liczb 3 i 4 jest równa 7 i suma kwadratów liczb 3 i 4 jest równa kwadratowi liczby 7.

c) Liczba $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest nie większa od 1 i liczba $\sqrt{7}-3$ jest nieujemna.

d) Iloczyn liczb (-7) i (-2) jest różny od $\sqrt{196}$ lub iloraz liczby $\sqrt{3}$ przez $\left(-2\sqrt{3}\right)$ jest nie większy od $-0,6$.

e) Iloczyn liczb $\sqrt{5}$ i $\left(-\sqrt{2}\right)$ jest liczbą niedodatnią i sześcian sumy tych liczb jest liczbą nieujemną.

f) Iloraz liczby 6 przez sumę liczb 2 i 1 jest równy 3 lub różnica liczb 4 i (-5) jest różna od kwadratu liczby (-3).

2.137. Zdanie „Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 27” zapisujemy symbolicznie: „$3|27$”. Natomiast zdanie „Liczba 27 nie jest podzielna przez 5” zapisujemy symbolicznie: „$5\nmid 27$”. Zapisz poniższe zdania, używając symboli matematycznych. Oceń wartości logiczne tych zdań.

a) Liczba 2 jest dzielnikiem liczby 6 i liczba 3 nie jest dzielnikiem liczby 9.

b) Liczba 6 jest dzielnikiem liczby 12450 lub liczba 3011 jest parzysta.

c) Liczba 4 nie jest dzielnikiem liczby 110 i liczba 1000 jest podzielna przez 8.

d) Liczba $(0 \cdot 1001)^2$ nie jest podzielna przez 2 lub liczba 10101 nie jest podzielna przez 3.

2.138. Wiadomo, że prawdziwe jest zdanie: *Wczoraj Janek odwiedził Adama i nie spotkał się z Bartkiem*. Oceń prawdziwość zdań:

a) Wczoraj Janek spotkał się z Bartkiem.

b) Wczoraj Janek nie odwiedził Adama lub nie spotkał się z Bartkiem.

c) Nieprawda, że Janek odwiedził wczoraj Adama i Bartka.

2.139. Podaj wartości logiczne poniższych implikacji, oceniając najpierw wartości logiczne zdań prostych.

a) Jeżeli każdy prostokąt jest równoległobokiem, to każdy romb jest kwadratem.

b) Jeżeli każdy równoległobok jest prostokątem, to każdy romb jest kwadratem.

c) $\sqrt{2}<\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}-1<\sqrt{3}-1$

d) $\frac{2+2}{22}=1 \Rightarrow \frac{3+3}{33}=1$

e) $\frac{-3}{0,1}<\frac{-4}{0,1} \Rightarrow \frac{3}{0,1}>\frac{4}{0,1}$

f) $(-5)^3=-125 \Rightarrow \pi^2=10$

2.140. Podaj wartości logiczne poniższych równoważności, oceniając najpierw wartości logiczne zdań prostych.

a) Liczba 1101 jest podzielna przez 3 $\Leftrightarrow$ liczba 1101 + 9 jest podzielna przez 3

b) Liczba 50 jest podzielna przez 7 $\Leftrightarrow$ liczba 51 jest podzielna przez 7

c) $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow -3 = 3$

d) $\sqrt{4^2} < 0 \Leftrightarrow 2 < 6$

e) $5^2 - 4^2 = (5-4)^2 \Leftrightarrow -1 = 1$

f) $0 : (-2) < 0 \Leftrightarrow 0 : (-2) > 0$

2.141. Oceń wartość logiczną zdań. Odpowiedź uzasadnij.

a) $(7 \geq 1 \wedge 5|17) \Rightarrow 7 \cdot 5 = 35$

b) $(\sqrt{3} \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \left[(2\sqrt{3})^2 \leq (2\sqrt{2})^2 \vee -\sqrt{3} \geq -\sqrt{2}\right]$

c) $2|10 \Rightarrow \left(10 : 2 = 5 \wedge 5\sqrt{10} = 5\sqrt{2}\right)$

d) $(3 \nmid 5 \vee 3 \mid 5) \Leftrightarrow (1 \cdot 0 > 0 \vee 1 \cdot 0 < 0)$

e) $-4 > 1 \Leftrightarrow [-4 \cdot (-1) < 1 \cdot (-1) \wedge (-4)^2 < (-1)^2]$

f) $(2 + 3 = -5 \vee 2 + 3 = 5) \Leftrightarrow [(2+3)^2 = 25 \Rightarrow 2 + 3 = -5]$

2.142. Napisz zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń:

a) Liczba 7 jest liczbą naturalną lub liczbą pierwszą.

b) 2 jest liczbą złożoną i 5 nie jest liczbą parzystą.

c) 6 nie jest liczbą parzystą lub 5 jest dzielnikiem 8.

d) Liczba $(-2)^3$ jest nieujemna i mniejsza niż $(-1)^3$.

2.143. Napisz zaprzeczenia zdań i oceń wartość logiczną zaprzeczeń:

a) $4^2 = 16 \wedge (-4)^2 = 16$

b) $7 < 10 \wedge 7 \geq 3$

c) $3 \nmid 9 \vee 2|11$

d) $2 > 3 \vee 3 \leq \sqrt{3}$

e) $2 \cdot (-5) > 0 \wedge \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{5^2}$

f) $-3^2 \neq (-3)^2 \vee \sqrt{8} \neq 2\sqrt{2}$

g) $(4+5)^2 = 4^2 + 5^2 \vee \sqrt{13^2 - 5^2} = 13 - 5$

h) $4^2 = 2^4 \wedge 5^2 \neq 2^5$

2.144. Napisz zaprzeczenia podanych zdań. Które zaprzeczenia są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

a) Jeżeli $3 \cdot 2 > 5 \cdot 2$, to $3 \cdot (-2) \geq 5 \cdot (-2)$.

b) Jeżeli $3 + 3 \neq 3 \cdot 3$, to $2 + 2 \neq 2 \cdot 2$.

c) Jeżeli liczba 3 jest nie większa od $\sqrt{10}$, to liczba $-\sqrt{10}$ jest mniejsza od -3.

d) $[10^2 = 100 \wedge (-10)^2 = 100] \Rightarrow 10 = -10$

e) $\sqrt{2} \leq \sqrt{7} \Rightarrow \left(\sqrt{2} < 1{,}4 \vee 7|85\right)$

f) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 = 216 \Rightarrow [(-2)^3 < 108 \wedge (-3)^3 > 108]$

g) $6 \geq 4 \Rightarrow [6 : (-4) \geq -1 \vee 6 \cdot 0 \neq 4 \cdot 0]$

h) $-3 < -2 \Rightarrow \left[-\frac{1}{3} < -\frac{1}{2} \wedge -3 + \frac{1}{2} \neq -2 - \frac{1}{2}\right]$

2.145. Oceń wartość logiczną podanych zdań i znajdź ich zaprzeczenia:

a) $\bigwedge_{x \in R} x^2 + 2 > 0$

b) $\bigvee_{x \in N} x < 2$

c) $\bigwedge_{x \in N} \left(\sqrt{x} \geq 0 \vee x < 0\right)$

d) $\bigwedge_{x \in N} \left(\sqrt{x} = 4 \vee x^2 = 16\right)$

e) $\bigwedge_{x \in Z} \left(x \geq 5 \wedge x \leq 5\right)$

f) $\bigwedge_{x \in R} \left(x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\right)$

g) $\bigwedge_{x \in R} \left(x > 0 \vee x \leq 0\right)$

h) $\bigwedge_{x \in R} \left(x^2 = 2 \wedge x < 0\right)$

Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia

2.146. Poniżej znajdują się twierdzenia, niektóre z nich to zdania fałszywe. Dla każdego twierdzenia wypisz założenie i tezę. Sformułuj twierdzenie odwrotne do danego. Oceń wartość logiczną danego twierdzenia i twierdzenia do niego odwrotnego.

a) Jeśli liczba jest parzysta, to jest podzielna przez 12.
b) Jeśli trójkąt ma tylko dwa kąty ostre, to jest ostrokątny.
c) Jeśli liczba jest podzielna przez 3 i przez 5, to jest podzielna przez 15.
d) Jeśli przekątne czworokąta przecinają się pod kątem prostym, to czworokąt jest kwadratem.
e) Jeśli dwie liczby są ujemne, to ich iloczyn jest liczbą dodatnią.
f) Jeśli dwie liczby mają różne znaki, to ich iloczyn jest liczbą ujemną.
g) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 100, to liczba ta jest podzielna przez 25
h) Jeśli czworokąt ma dwie przekątne równej długości, to ten czworokąt jest trapezem równoramiennym.

2.147. Sformułuj twierdzenie Pitagorasa w postaci implikacji. Wypisz założenia i tezę. Następnie zapisz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa; podaj założenie i tezę tego twierdzenia.

2.148. Dane są zdania p i q. Zapisz twierdzenie $p \Rightarrow q$ i twierdzenie odwrotne do niego $q \Rightarrow p$, a następnie oceń wartości logiczne tych implikacji. Czy równoważność $p \Leftrightarrow q$ jest zdaniem prawdziwym?

a) p: Romb jest kwadratem.
   q: Każdy kąt rombu ma miarę 90°.
b) p: Liczba naturalna jest podzielna przez 20.
   q: Liczba naturalna jest podzielna przez 10 i przez 2.
c) p: Suma dwóch liczb jest dodatnia.
   q: Dwie liczby są dodatnie.
d) p: Trójkąt jest równoboczny.
   q: Wszystkie kąty trójkąta mają miarę 60°.

e) p: Trójkąt nie jest prostokątny.
q: Trójkąt jest równoboczny.

f) p: Liczba całkowita jest podzielna przez każdą liczbę naturalną dodatnią.
q: Liczba jest równa 0.

g) p: Iloczyn dwóch liczb jest ujemny.
q: Iloraz dwóch liczb jest ujemny.

h) p: Czworokąt jest równoległobokiem.
q: Czworokąt ma parę boków równych.

2.149. Poniższe twierdzenia są zdaniami prawdziwymi. Sformułuj twierdzenia odwrotne do nich i oceń, czy są prawdziwe.

a) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 16, to jest ona podzielna przez 8 i przez 2.

b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 21, to jest podzielna przez 3 i przez 7.

c) Jeśli wszystkie boki równoległoboku mają taką samą długość, to równoległobok ten jest rombem.

d) Jeśli trójkąt jest rozwartokątny, to co najmniej jeden kąt tego trójkąta jest ostry.

2.150. Podaj kontrprzykład pokazujący, że poniższe twierdzenie jest fałszywe.

a) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to ta liczba jest podzielna przez 18.

b) Jeżeli kwadrat liczby rzeczywistej jest dodatni, to ta liczba rzeczywista też jest dodatnia.

c) Jeżeli przekątne czworokąta są prostopadłe, to czworokąt jest rombem.

d) Jeżeli przekątne czworokąta są równej długości, to czworokąt jest prostokątem.

2.151. Uzasadnij, dlaczego poniższe zdania są fałszywe.

a) Liczbą niewymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić w postaci ułamka.

b) Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.

c) $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_{+} \cup \boldsymbol{Z}_{-}$

d) Pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką liczbę b, dla której $b^2 = a$.

D **2.152.** Wykaż, że jeśli $n \in \boldsymbol{N}$ i $n \geq 1$, to liczba $4^{n+2} - 4^n$ jest podzielna przez 60.

D **2.153.** Wykaż, że jeśli $n \in \boldsymbol{N}$, to liczba $3^n + 3^{n+3} + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 4.

D **2.154.** Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

D **2.155.** Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

D **2.156.** Wykaż, że iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 2.

D 2.157. Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6.

D 2.158. Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą.

D 2.159. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest liczbą parzystą.

D 2.160. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa 2.

D 2.161. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 16 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest równa 8.

D 2.162. Wykaż, że jeśli $a > 3$ i $b > 4$, to $\frac{2a+3b}{6} > 3$.

D 2.163. Wykaż, że jeśli $a < 1$ i $b > -4$, to $\frac{4a-2b}{3} < 4$.

D 2.164. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówność $a > b > c$, to $a > \frac{b+c}{2}$.

D 2.165. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

a) $x^2 + 2xy + 3y^2 \geq 0$

b) $2x^2 + 25y^2 \geq 10xy$

c) $xy \leq \frac{x^2+9y^2}{6}$

d) $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - xy \geq 0$

D 2.166. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to:

a) $a - 8 + \frac{17}{a} > 0$

b) $2a + \frac{49}{a} > 14$

D 2.167. Wykaż, że jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, to $a = b$.

D 2.168. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbf{R}$ i $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$, to $a = b = c$.

D 2.169. Wykaż, że:

a) liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna;

b) liczba $\sqrt{p}$, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest niewymierna.

D 2.170. Liczba $\sqrt{11}$ jest liczbą niewymierną. Wykaż, że liczby: $7\sqrt{11}+5$, $\frac{-3\sqrt{11}+4}{2}$, $\frac{\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}}$ są liczbami niewymiernymi.

D 2.171. Wykaż, że jeśli a jest liczbą niewymierną, to również liczby: $5a+2$ i $\frac{a-3}{4}$ są niewymierne.

D 2.172. Wykaż, że jeśli dwie dowolne liczby rzeczywiste a, b spełniają nierówność $ab>5$, to $a^2+b^2>10$.

D 2.173. Wykaż, że jeśli dwie dowolne liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $ab\leq -3$, to $a^2+b^2\geq 6$.

D 2.174. Wykaż, że jeśli dwie dowolne liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a^2b^2\geq 7$, to $a^4+b^4\geq 14$.

Przekształcanie wzorów

2.175. Z podanych wzorów wyznacz wskazane wielkości:

a) $d=\frac{V}{m}$; m, V b) $F=m\cdot a$; m

c) $p\cdot V=n\cdot R\cdot T$; p, T d) $\alpha=\sqrt{\frac{K}{c}}$; K, c

2.176. Z podanych wzorów wyznacz wskazane wielkości:

a) $x=x_0+v\cdot t$; x_0, t

b) $v=v_0-a\cdot t$; v_0, a

c) $C_p=\frac{m_s}{m_s+m_r}\cdot 100\%$; m_r, m_s

d) $m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2=(m_1+m_2)\cdot v_3$; v_1, v_3, m_1

2.177. Z podanych wzorów wyznacz wskazane wielkości:

a) $P=\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$; d_1

b) $P=\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; a $(a>0)$

c) $R=\frac{a \cdot \sqrt{6}}{4}$; a

d) $V=\frac{1}{12} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}$; a

2.178. Z podanych wzorów wyznacz wskazane wielkości:

a) $P=\frac{c+d}{2} \cdot h$; c, h

b) $P=2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r+h)$; h

c) $P=2 \cdot (a \cdot b+b \cdot c+a \cdot c)$; a

d) $P=\frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2}$ a, c $(a, b, c>0)$

Średnie

2.179. Oblicz średnią arytmetyczną i geometryczną poniższych liczb i porównaj t
średnie:

a) 2 8

b) 1 4 16

c) 8 12 12 18

d) 3 3 3 3

2.180. Wyniki sprawdzianu dla uczniów klas pierwszych pewnego liceum ilustru
poniższa tabela:

ocena	liczba ocen
6	2
5	16
4	34
3	52
2	8
1	3

a) Oblicz średnią ocen ze sprawdzianu.

b) Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ze sprawdzianu co najmniej 4.

c) Oblicz, ile procent uczniów otrzymało ze sprawdzianu ocenę poniżej średniej.

Wyniki zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

2.181. Nauczyciel powiedział uczniom, że ocena semestralna jest średnią ważoną ocen cząstkowych. Przy czym najważniejsze są prace klasowe (waga 50), trochę mniej ważne są odpowiedzi ustne (waga 30), a najmniej ważne są kartkówki (waga 20). Jakiej oceny semestralnej może spodziewać się osoba, która otrzymała:

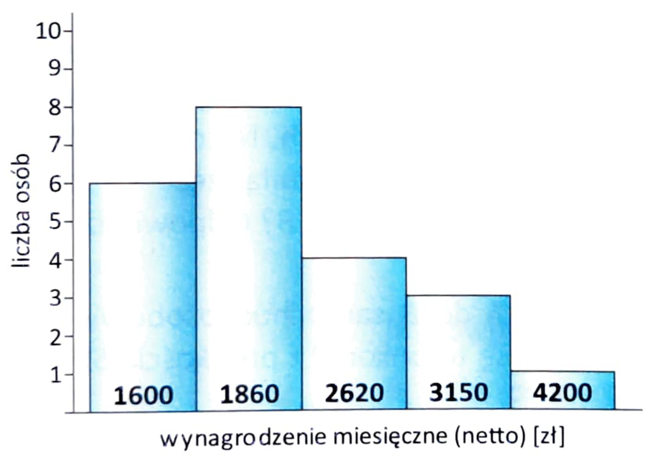
a) z klasówek: 5, 5, 3; z odpowiedzi 4; z kartkówki 1

b) z klasówek: 1, 5, 3; z odpowiedzi 4; z kartkówki 5.

2.182. Zmieszano trzy gatunki cukierków: 12 kg cukierków „Wiosennych" w cenie 25 zł za kilogram, 5kg cukierków „Jesiennych" w cenie 15 zł za kilogram i 3 kg cukierków „Zimowych" w cenie 40 zł za kilogram. Jaka powinna być cena 1 kilograma tak otrzymanej „Mieszanki wybornej"?

2.183. W klasie IIIa próbny egzamin maturalny z biologii pisało 20 uczniów. W tej klasie średni wynik z tego egzaminu był równy 60%. W klasie IIIb próbny egzamin maturalny z biologii pisało 5 uczniów. Średni wynik uzyskany przez tych uczniów był równy 40%. Jaki był średni wynik próbnego egzaminu maturalnego z biologii uczniów z klasy IIIa i z klasy IIIb?

2.184. Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie netto pracowników pewnej firmy.



a) Oblicz średnie wynagrodzenie netto w tej firmie.

b) Oblicz procent pracowników, którzy zarabiają więcej niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie.

c) Jaki procent najwyższego wynagrodzenia stanowi wynagrodzenie najniższe?

Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.185. Dwie trzecie pewnego towaru sprzedawca sprzedał z zyskiem 25%, 20% towaru – z zyskiem 40%, a pozostałą część – z zyskiem 30%. Jaki procentowy zysk uzyskał ze sprzedaży tego towaru? Wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

2.186. Na wycieczkę pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrośnie do 24 lat, jeśli doliczy się wiek przewodnika. Ile lat ma przewodnik?

2.187. W pewnym zakładzie pracuje 11 osób. Średnia wieku zatrudnionych wynosi 32 lata. Jeden z pracowników zakładu zachorował i poszedł na zwolnienie lekarskie. Średnia wieku pozostałych w pracy wynosi teraz 31 lat. Ile lat ma pracownik, który przebywa na zwolnieniu?

2.188. Średnia płaca netto w zakładzie zatrudniającym 34 osoby jest równa 1820 zł. Po wypłaceniu pensji nowo przyjętemu pracownikowi średnia płacy dla wszystkich zatrudnionych osób wzrosła o 2%. Jaką płacę otrzymał nowy pracownik?

2.189. W pewnym mieście liczba mieszkańców wzrastała przez trzy kolejne lata odpowiednio o 1%, o 3% i o 5%. Oblicz średni, procentowy wzrost liczby ludności w ciągu tych trzech lat. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

2.190. W czterech kolejnych latach inflacja w Polsce była równa: 7,3%, 10,1%, 5,5%, 1,9%. Jaka była średnia inflacja w tych czterech latach? Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

2.191. Z miejscowości A do B jednocześnie wyjechały dwie ciężarówki. Pierwsza połowę czasu przeznaczonego na przebycie drogi jechała z prędkością 50 km/h, drugą połowę czasu – z prędkością 40 km/h. Natomiast druga ciężarówka połowę drogi jechała z prędkością 40 km/h, a pozostałą część – z prędkością 50 km/h. Która z ciężarówek była pierwsza w miejscowości B? Odpowiedź uzasadnij.

2.192. Odległość z miasta A do B samochód osobowy przejechał z prędkością 70 km/h, zaś z powrotem trasę tę pokonał z prędkością 50 km/h. Jaka była średnia prędkość samochodu?

2.193. Autobus jechał z miasta A do B z prędkością 72 km/h. Po przyjeździe do B natychmiast zawrócił do A. Średnia prędkość na całej trasie (z A do B i z B do A) wyniosła 57,6 km/h. Z jaką prędkością jechał autobus z B do A?

2.194. Samochód przejechał trasę z A do B w ciągu 1 godziny. Pół godziny jechał z prędkością 68 km/h, pozostałe 30 minut – z prędkością 42 km/h. Jaka była średnia prędkość samochodu na trasie z A do B?

D **2.195.** Wykaż, że jeśli $a \in \boldsymbol{R}$ i $b \in \boldsymbol{R}$, to $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$.

D **2.196.** Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

D **2.197.** Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

1. Jola wykonała obliczenia:

I. $\left(1+\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{7}$ II. $\sqrt[3]{0,2^6} = 0,04$ III. $\frac{2+\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}$

Poprawne obliczenia są:

A. tylko w przykładzie II
B. tylko w przykładach I i II
C. tylko w przykładach I i III
D. we wszystkich przykładach

2. Po uproszczeniu wyrażenia $\frac{(a:a^3)^{-1}}{a^{-4}}$, gdzie $a \neq 0$, otrzymamy:

A. a^6 B. a^2 C. a^{-2} D. a^{-6}

3. Liczba $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ jest:

A. równa $2-\sqrt{3}$
B. równa $\sqrt{3}+2$
C. mniejsza od $\sqrt{3}$
D. odwrotnością liczby $2+\sqrt{3}$

4. Wyrażenie $\left(2\frac{1}{4}\right)^{0,5}$ jest równe:

A. 2,5 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $0,5\sqrt{2}$

5. Wyrażenie: „pierwiastek kwadratowy z podwojonej sumy kwadratów liczb a i b" można zapisać symbolicznie w następujący sposób:

A. $\sqrt{2a^2+b^2}$ B. $\sqrt{2(a+b)^2}$ C. $2\sqrt{a^2+b^2}$ D. $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

6. Liczbę $6,5 \cdot 10^{-7}$ można zapisać w postaci:

A. $65 \cdot 10^{-6}$ B. $-0,0000065$ C. $65 \cdot 10^{-8}$ D. $-6,5 \cdot 10^{7}$

7. Przybliżenie liczby $10^{-0,8}$ jest równe 0,158489. Przybliżeniem dziesiętnym liczby $10^{0,2}$ z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku jest liczba:

A. 0,015 B. 3,170 C. 15,849 D. 1,585

8. Dane są liczby: $a = (-2^{-2})^3$, $b = \left[\left(-8\right)^2\right]^{\frac{1}{3}}$, $c = \sqrt[3]{-8^2}$. Wówczas prawdziwa jest podwójna nierówność:

A. $a \le b \le c$ B. $b \le c \le a$ C. $c \le b \le a$ D. $c \le a \le b$

9. Rozwiązaniem równania $a^2x + 4 = 0$ jest liczba (-1) wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $a = -4$ B. $a = 2$ C. $a \in \{-2, 2\}$ D. $a \in \boldsymbol{R} - \{2, -2\}$

10. Równanie $x^4(x^2 + 14x + 49) = 0$:

A. ma tylko dwa rozwiązania
B. ma tylko jedno rozwiązanie
C. jest sprzeczne
D. jest tożsamościowe.

11. Kwadrat liczby x jest o 1 większy od kwadratu liczby x pomniejszonej o 1. Zatem:

A. $x = 0$ B. $0 < x < 1$ C. $x = 1$ D. $x > 1$

12. Zbiorem rozwiązań nierówności $(x - 3)(x + 2) \le x(x + 2)$ jest:

A. zbiór pusty
B. przedział $\langle -2, +\infty)$
C. przedział $(-\infty, 3\rangle$
D. zbiór liczb rzeczywistych

13. Wyrażenie $x^2 - (2x + 3)^2$ po rozłożeniu na czynniki ma postać:

A. $3(3 - x)(x + 1)$ B. $-3(x + 1)(x + 3)$ C. $(3x - 3)(3 - x)$ D. $(x + 3)(-3x + 3)$

14. Suma $\log_6 9 + \log_6 4$ jest równa:

A. -2 B. 2 C. 6 D. $-\frac{1}{2}$

15. Liczba $\log_3 \sqrt[3]{0,(3)}$ jest liczbą:

A. mniejszą od -2
B. całkowitą nieujemną
C. niewymierną
D. wymierną ujemną

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

16. Rozwiąż równania:

a) $\left(8\frac{1}{6}\right)^3 : \left(8\frac{1}{6}\right)^2 \cdot x = \left(1\frac{1}{6}\right)^2$ b) $2^5 \cdot x + 2^7 \cdot x = 14^2 : 0{,}5 - 2^6 \cdot x$

17. Wykonaj działania:

a) $2\left(\sqrt[3]{64} - \sqrt{3^4}\right) \cdot \left(3\sqrt[3]{8} - 2\sqrt[5]{-1}\right)$ b) $\left(3\sqrt{75} - 2\sqrt{12}\right) : \left(11\sqrt{3}\right)$

c) $\left(0{,}25\sqrt[3]{27} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{256}\right) \cdot \sqrt{4(-10)^4}$ d) $\frac{\sqrt{144} + 6\sqrt[3]{-343}}{18} \cdot \left(\sqrt[4]{81} \cdot 0{,}2\sqrt{50}\right)$

18. Rozwiąż równanie: $2x + 2 = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$. Przedstaw rozwiązanie w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c oznaczają liczby całkowite i $c > 0$.

19. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1-16\sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} + \frac{8\sqrt{42}+3}{2}$

20. Sprowadź wyrażenia do najprostszej postaci i oblicz ich wartość dla podanych obok wartości zmiennych:

a) $2(x-3y)^2 - 3(x-2y)(x+2y) + 12xy$; $x = 3$, $y = -1$

b) $(2a-3b)^2 - (2a+b)(2a-b) - 4b(2b-3a) + a$; $a = 2$, $b = \sqrt{2}$

c) $(2a-b)^2 - \left(\frac{1}{2}a - 1\right)\left(\frac{1}{2}a + 1\right) - (4a^2 + b^2)$; $a = 0{,}2$; $b = \frac{1}{4}$

d) $2(5x^2+4) + (2x-3)(2x+3) - 2(3x-1)^2 + 3(1-2x)^2$; $x = -\frac{1}{2}$

21. Rozwiąż równania:

a) $12 - 2(x-1)^2 = 4(x-2) - (x-3)(2x-5)$

b) $(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2$

c) $5(x-1)^2 - 2(x+3)^2 = 3(x+2)^2 - 7(6x-1)$

d) $2x^2 + (x+5)^2 - 2(x+7)^2 = 2(3x-72{,}5) + (x-6)^2$

22. Wyznacz wartość a tak, aby podana obok równania liczba była rozwiązaniem tego równania:

a) $(3x+1)(x+a) - 3(x-1)(x-a) = 4$; $0{,}5$

b) $(x+a)^2 - (x-a)^2 = 40$; 2

c) $(2x-a)(2x+a) - (2x+a)^2 = 2$; -1

d) $(x-a)(x+a) - (x-a)^2 = 8$; 4

23. Rozwiąż nierówności:

a) $(3x-2)^2-5x-(3x+2)(3x-2)<(2-3x)^2-9x^2+4$

b) $2(x-3)^2-\frac{1}{2}\geq\frac{(2x-3)(2x+3)}{2}-x$

c) $(x-3)^2-\frac{x^2-3}{3}-9<\frac{(x-2)(x+2)}{6}+\frac{1}{2}x^2$

d) $1-(3x-2)^2\geq\frac{x-36}{3}-9(x+1)(x-1)$

24. Rozłóż wyrażenia na czynniki:

a) $9-x^4$

b) $2x^2-16x+32$

c) $25-4(x-y)^2$

d) $(2x-1)-y(1-2x)$

25. Sprowadź wyrażenie $[y^3:(y^2\cdot y^{-3})]^4:\left[\left(\frac{1}{y}\right)^4\cdot\frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$, $y\neq 0$, do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y=\sqrt{2\sqrt{2}}$.

26. Porównaj liczby:

a) $x=81^{20}$ i $y=1024^8$

b) $x=128^{36}$ i $y=4^{125}$

c) $x=\left(\frac{1}{27}\right)^{-48}$ i $y=243^{28}$

d) $x=\left(2\sqrt{2}\right)^{28}$ i $y=\left(\frac{\sqrt{8}}{64}\right)^{-6}$

27. Oblicz:

a) $\sqrt{9}\cdot\left[(1{,}5)^{-1}+9^{-1{,}5}\right]-27^{-\frac{2}{3}}$

b) $\left[\left(\frac{81}{625}\right)^{-0{,}75}:\left(1\frac{2}{3}\right)^3-(0{,}125)^{\frac{1}{3}}\right]^{-2}$

c) $\sqrt[3]{0{,}375}\cdot\sqrt[3]{9}+\left(3^{-1}-\sqrt[4]{\frac{16}{81}}\right)^{-2}$

d) $\left[\frac{125^{\frac{2}{3}}-(0{,}2)^{-1}}{(0{,}5)^{-2}}\cdot(0{,}2)^{-3}\right]^{\frac{3}{4}}$

28. Wiedząc, że przybliżenie liczby $100^{-\frac{3}{4}}$ jest równe 0,031623, wyznacz przybliżenia liczb:

a) $100^{\frac{1}{4}}$

b) $100^{\frac{5}{4}}$

29. Oblicz wartość wyrażenia: $\dfrac{\log\sqrt{128}+\log 32^{\frac{1}{3}}}{\log\left(2\sqrt{2}\right)}$.

30. Wiedząc, że $\log_5 12 = a$ oraz $\log_5 2 = b$, oblicz:

a) $\log_5 6$ b) $\log_5 9$ c) $\log_5 \sqrt[5]{3}$ d) $\log_3 50$

31. Średni wiek uczestników szkolnego kółka teatralnego wynosi 11 lat. Najstarszy uczestnik ma 17 lat, a średni wiek pozostałych jest równy 10 lat. Ilu uczniów uczestniczy w zajęciach kółka teatralnego?

32. W pewnym mieście przez trzy kolejne lata badano zmianę liczby ludności. W pierwszym roku liczba ludności wzrosła o 4%, w drugim zmalała o 4%, a w trzecim się nie zmieniła. Ile wyniosła średnia, procentowa zmiana liczby ludności w ciągu tych trzech lat? Wynik podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

D **33.** Wykaż, że jeśli $n \in \boldsymbol{N}_+$, to liczba $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ jest podzielna przez 155.

D **34.** Wykaż, że liczba $5^{12} - 1$ jest podzielna przez 124.

D **35.** Wykaż, że liczba $3^{16} - 2^{16}$ jest podzielna przez 65.

D **36.** Wykaż, że jeśli x i y są liczbami rzeczywistymi, $x^2 + y^2 = 2$ i $x + y = 1$, to $xy = -\dfrac{1}{2}$.

D **37.** Wykaż, że jeśli $x^2 + y^2 = 7$ oraz $xy = 1$ i $x < 0$, to $x + y = -3$.

D **38.** Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność:
$a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$

D **39.** Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest wielokrotnością liczby 8.

D **40.** Wykaż, że liczba $\sqrt{11}$ jest liczbą niewymierną.

41. Oblicz:

a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ b) $\left[\left(2^{0,5}-1\right)^{0,5} + \left(2^{0,5}+1\right)^{0,5}\right]^2$

D 42. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste x, y spełniają zależności $x^2 + y^2 = 2$ i $x + y = 2$, to $x = y = 1$.

D 43. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów dwóch dowolnych liczb niepodzielnych przez 3 jest równa 2. Rozważ trzy przypadki.

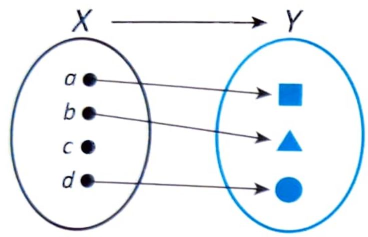
D 44. Wykaż, że: $a^2(b+c)(b-c) + b^2(c+a)(c-a) + c^2(a+b)(a-b) = 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c.

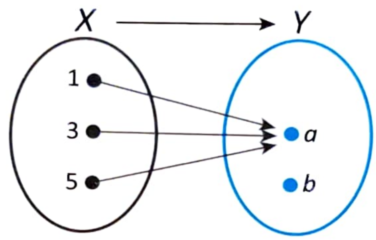
D 45. Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności $a > b > c > d > 0$, to $\frac{a+c}{2} > \frac{a+b+c+d}{4} > \frac{b+d}{2}$.

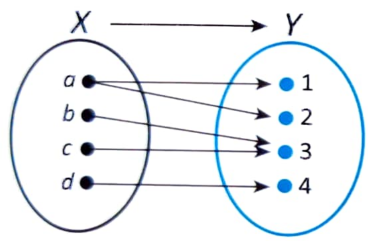
3. Funkcja i jej własności

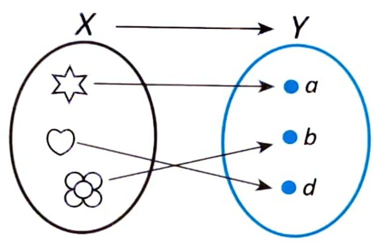
Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Sposoby opisywania funkcji

3.1. Który z poniższych grafów jest grafem funkcji odwzorowującej zbiór X w zbiór Y? Odpowiedź uzasadnij.

a)


b)


c)


d)


W przypadku funkcji podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

3.2. Które z podanych przyporządkowań są funkcjami? Odpowiedź uzasadnij.

a) Każdemu państwu europejskiemu przyporządkowujemy jego obecną stolicę.
b) Każdemu aktorowi filmowemu przyporządkowujemy tytuł filmu, w którym zagrał.
c) Każdemu uczniowi Twojej klasy przyporządkowujemy ocenę z matematyki na świadectwie ukończenia szkoły podstawowej.
d) Każdej liczbie całkowitej przyporządkowujemy jej kwadrat.

3.3. Wykonaj siedem rzutów kostką sześcienną do gry. Każdemu rzutowi przyporządkuj liczbę wyrzuconych oczek (zakładamy, że kostka tak upadnie, że za każdym razem będziemy mogli odczytać wynik). Zapisz otrzymane pary liczb w postaci:

$\{(x, y)$: x – numer rzutu, y – liczba otrzymanych oczek$\}$.

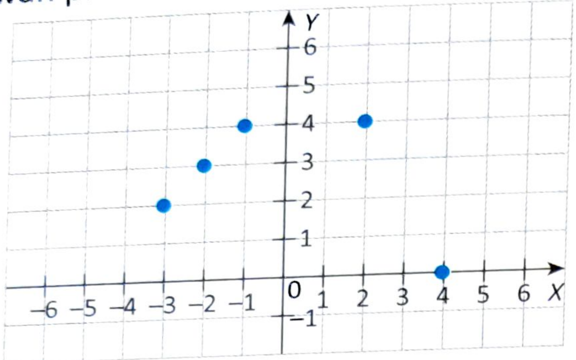
Podaj dziedzinę opisanej w ten sposób funkcji, zbiór wartości tej funkcji oraz wartość funkcji dla argumentu 4.

3.4. Funkcja f odwzorowuje zbiór $X = \{1, 4, 5, 7, 8\}$ w zbiór $Y = \{0, 3, 4, 6, 8\}$, w taki sposób, że $f(1) = 4$, $f(4) = 6$, $f(5) = 4$, $f(7) = 3$, $f(8) = 0$.

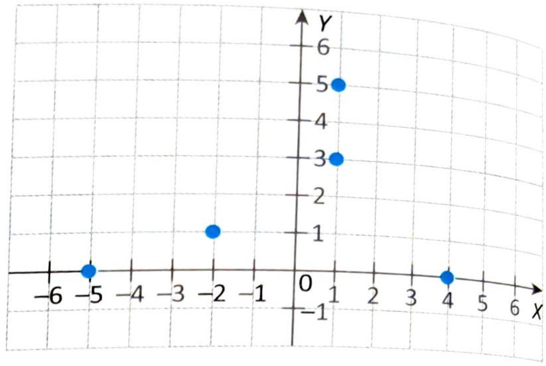
a) Narysuj graf funkcji f.
b) Czy funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y?

3.5. W prostokątnym układzie współrzędnych przedstawiono wykresy przyporządkowań przekształcających zbiór X w zbiór Y.

a)



b)



1) Które z tych przyporządkowań jest funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y? Odpowiedź uzasadnij.
2) W przypadku funkcji – podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

3.6. Funkcja f jest opisana za pomocą wzoru $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$, gdzie $x \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

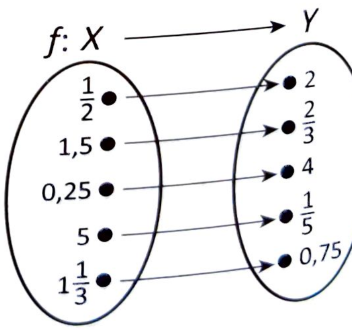
a) Oblicz $f(-4), f(-3), f(-2), f(-1)$.
b) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki.

3.7. Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x)=\log_2 x$, gdzie $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 4, 32\right\}$.

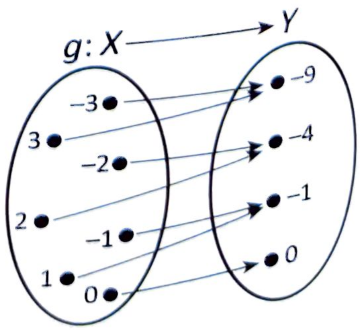
a) Oblicz $f\left(\frac{1}{8}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1), f(4), f(32)$.

b) Przedstaw tę funkcję za pomocą zbioru par uporządkowanych.

3.8. Na rysunku obok przedstawiony jest graf pewnej funkcji f.
a) Podaj opis słowny tego przyporządkowania.
b) Podaj wzór funkcji f.

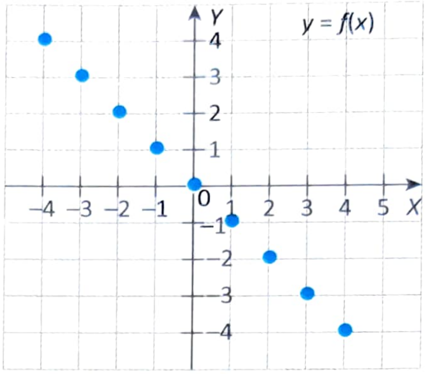


3.9. Na rysunku obok przedstawiony jest graf pewnej funkcji g.
a) Dla jakich argumentów wartość funkcji g jest równa -4?
b) Jaką wartość przyjmuje funkcja g dla argumentu -1?
c) Podaj wzór funkcji g.
d) Narysuj wykres funkcji g.



3.10. W prostokątnym układzie współrzędnych (rysunek obok) przedstawiony jest wykres funkcji f.

a) Przedstaw funkcję f za pomocą zbioru par uporządkowanych.
b) Podaj dziedzinę funkcji f.
c) Podaj zbiór wartości funkcji f.
d) Podaj wzór funkcji f.

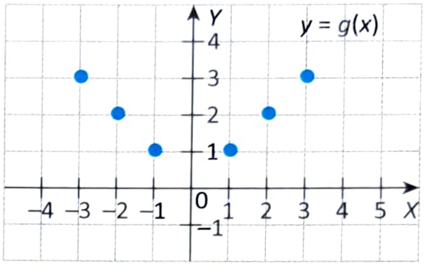


3.11. W prostokątnym układzie współrzędnych (rysunek obok) przedstawiony jest wykres funkcji g.

a) Uzupełnij tabelkę funkcji g:

x	-3	-2	-1			
$g(x)$				1	2	3

b) Podaj opis słowny funkcji g.
c) Podaj wzór funkcji g.



3.12. Funkcja h opisana jest za pomocą tabelki:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7

a) Podaj wartość funkcji h dla argumentu 0.
b) Podaj argument, dla którego funkcja h przyjmuje wartość 2.
c) Podaj wzór funkcji h.
d) Narysuj wykres funkcji h.

3.13. Funkcja g każdej liczbie ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuje jej sześcian pomniejszony o 3.

a) Napisz wzór funkcji g.
b) Uzupełnij tabelkę funkcji g

x		0	1	
$g(x)$	-4			5

c) Narysuj wykres funkcji g.

3.14. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje kwadrat tej liczby pomniejszonej o 1.

a) Zapisz funkcję f za pomocą zbioru par uporządkowanych.
b) Napisz wzór funkcji f.
c) Dla jakich argumentów wartość funkcji jest równa 4?
d) Narysuj wykres funkcji f.

3.15. Funkcja g opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych w następujący sposób: $\{(0, 0), (1, -1), (4, -2), (9, -3), (16, -4)\}$.

a) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{3}[g(4) - g(16)]^{g(1)}$.

b) Podaj opis słowny funkcji g.

c) Napisz wzór funkcji g.

3.16. Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$, a jej dziedziną je pięcioelementowy zbiór D_f.

a) Uzupełnij tabelkę funkcji f.

x		$-4\frac{1}{2}$			9
$f(x)$	16		3,5	3	

b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

c) Oblicz wartość wyrażenia $f(-4{,}5) \cdot f(9) - 3 \cdot f(0{,}75)$.

3.17. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-8, -4, -2, 0, 4\}$ przyporządkowuje 25 różnicy tej liczby i liczby 6.

a) Napisz wzór funkcji f.

b) Wyznacz wszystkie wartości funkcji f.

c) Oblicz wartość wyrażenia $\log_{\frac{1}{2}}\left[-\left(f(-8) + f(4)\right)\right]$.

d) Narysuj wykres funkcji f.

3.18. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ przyporządkowuj resztę z dzielenia tej liczby przez 2.

a) Sporządź tabelkę funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji f.

c) Podaj zbiór tych argumentów, dla których wartość funkcji f jest równa 1.

3.19. Funkcja h każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje podwojoną sumę te liczby i liczby 3.

a) Napisz wzór funkcji h.

b) Oblicz wartość funkcji h dla argumentu -51.

c) Wyznacz argument, dla którego wartość funkcji jest równa 8.

d) Czy funkcja h przyjmuje wartość równą 5? Odpowiedź uzasadnij.

3.20. Funkcja g każdej liczbie pierwszej z przedziału $\langle 0, 15\rangle$ przyporządkowuje licz bę o 2 od niej mniejszą.

a) Sporządź tabelkę funkcji g.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\left(g(11)\right)^{\frac{1}{g(7)-g(5)}}$.

c) Ile punktów, o obu współrzędnych będących liczbami pierwszymi, należy do wykresu funkcji g?

3.21. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje kwadrat tej liczby powiększony o 5.

a) Napisz wzór funkcji f.

b) Wykaż, że $f\left(-2\sqrt{3}\right)=f\left(2\sqrt{3}\right)$.

c) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należą punkty $A(-12, 149)$ oraz $B(-3, -4)$.

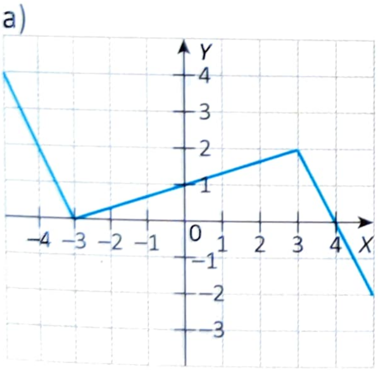
d) Uzasadnij, że funkcja f nie przyjmuje wartości równej 4.

3.22. Funkcja f opisana jest wzorem $f(x)=5(5-4x)+4x^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

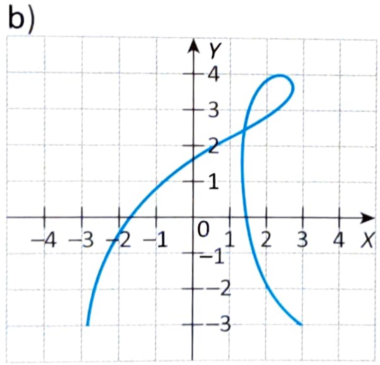
Wykres funkcji

3.23. Który zbiór punktów jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x? Odpowiedź uzasadnij.

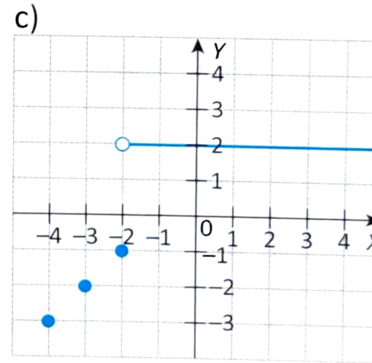
a)



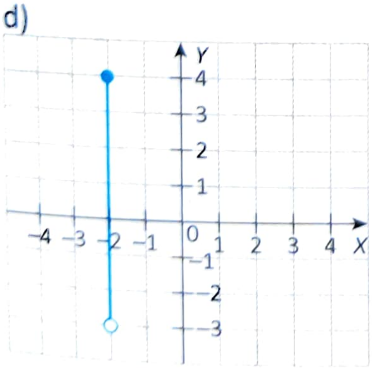
b)



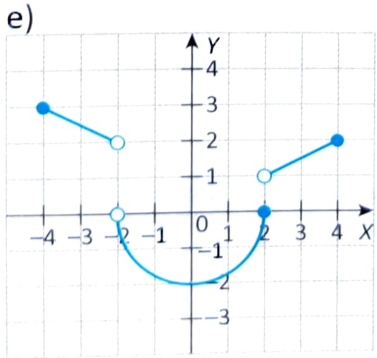
c)



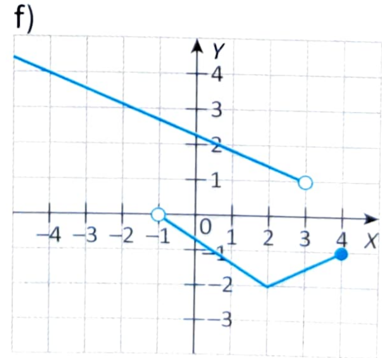
d)



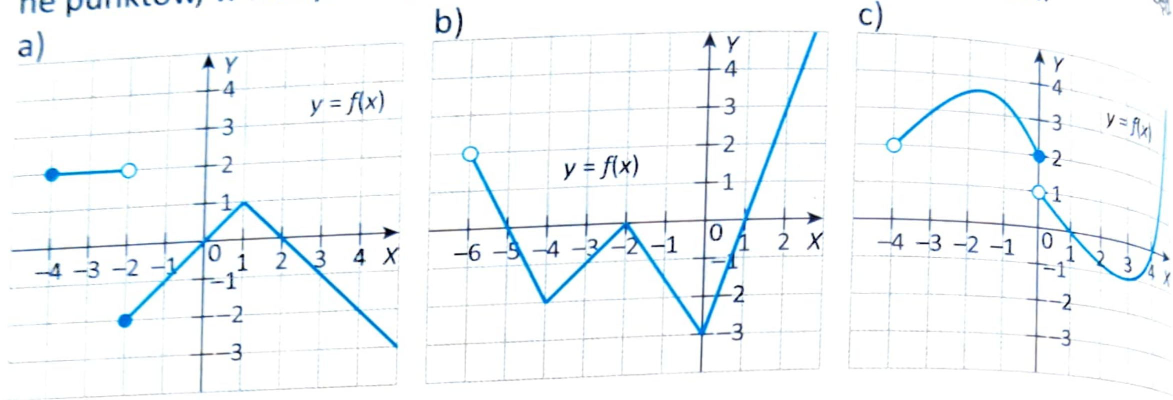
e)



f)



3.24. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f. Podaj współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina: 1) oś OY, 2) oś OX.



3.25. Dany jest zbiór $A = \left\{ \sqrt[3]{-8}, \log_2 16, \sqrt[4]{81}, \frac{1}{3}\log_9 27, \log_5 20 - \log_5 4 \right\}$. Funkcja f każdej liczbie ze zbioru A przyporządkowuje liczbę o 1 od niej mniejszą.

a) Narysuj wykres tej funkcji.

b) Napisz wzór funkcji f.

3.26. Funkcja f każdej liczbie x ze zbioru $X = \{3, 4, 7, 12\}$ przyporządkowuje pierwiastek kwadratowy z liczby o 3 od niej mniejszej.

a) Narysuj wykres tej funkcji.

b) Napisz wzór funkcji f.

3.27. Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3$, gdzie

$$x \in \left\{ \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 6, \frac{1}{2}\log_3 9, \frac{-1}{2}\log_{\sqrt{2}} 2, \log 1, \log_{\frac{1}{4}} 80 - \log_{\frac{1}{4}} 5 \right\}.$$

3.28. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{jeśli } x \in \langle -4, 2 \rangle \\ 1, & \text{jeśli } x \in (2, 5) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3, & \text{jeśli } x \in \langle -3, 0) \\ 4, & \text{jeśli } x \in (0, 4 \rangle \end{cases}$

3.29. Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej liczbie rzeczywistej ujemnej przyporządkowuje liczbę 3, liczbie 0 przyporządkowuje liczbę 2, zaś każdej liczbie dodatniej przyporządkowuje liczbę 0.

a) Podaj wzór funkcji f.

b) Podaj współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f: 1) z osią OY, 2) z osią OX.

3.30. Narysuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \in \{-3, -2, -1, 0\} \\ -\sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \{1, 4, 9\} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{jeśli } x \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\} \\ 8x, & \text{jeśli } x = 0 \end{cases}$

Podaj współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

3.31. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = x,\ x \in \langle -3, 2)$

b) $f(x) = x,\ x \in \langle -4, -2) \cup \langle -1, 1\rangle \cup (2, 3\rangle$

c) $f(x) = x,\ x \in (-\infty, -2) \cup \{1, 2, 3\}$

d) $f(x) = x,\ x \in (-\infty, -1\rangle \cup (1, +\infty)$

3.32. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = -x,\ x \in \langle -3, 4\rangle$

b) $f(x) = -x,\ x \in \{-3, -2, -1\} \cup (0, 4\rangle$

c) $f(x) = -x,\ x \in \langle -4, 1) \cup \langle 2, 3\rangle$

d) $f(x) = -x,\ x \in (2, +\infty)$

3.33. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in (0, 4\rangle$

b) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in \{0, 1\} \cup \langle 4, 9)$

c) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in \langle 0, 4\rangle \cup \{9\}$

d) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in (0, 1) \cup \{4, 9\}$

3.34. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = -\sqrt{x},\ x \in \langle 1, +\infty)$

b) $f(x) = -\sqrt{x},\ x \in \{0, 1\} \cup \langle 4, +\infty)$

c) $f(x) = -\sqrt{x},\ x \in (0, 1) \cup (4, 9\rangle$

d) $f(x) = -\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 9)$

3.35. Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f z osią OX, a następnie współrzędne punktu wspólnego tego wykresu z osią OY, jeżeli:

a) $f(x) = \frac{2x-7}{3},\ x \in \mathbf{R}$

b) $f(x) = 8 - 2x,\ x \in \mathbf{R}$

c) $f(x) = 4(x-1)(x+2),\ x \in \mathbf{R}$

d) $f(x) = (x+5)^2,\ x \in \mathbf{R}$

e) $f(x) = x^2 - 12x + 36,\ x \in \mathbf{R}$

f) $f(x) = 4x^2 - 9,\ x \in \mathbf{R}$

3.36. Wyznacz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f z osią OX oraz współrzędne punktu wspólnego tego wykresu z osią OY (o ile istnieją), jeżeli:

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 8,\ x \in (-\infty, 1\rangle$

b) $f(x) = -3x + 10,\ x \in \mathbf{N}$

c) $f(x) = 5x - 20,\ x \in \mathbf{N}$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 4,\ x \in \mathbf{Z}$

e) $f(x) = -2(x-4)(x+3),\ x \in \langle 1, +\infty)$

f) $f(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbf{R}$

3.37. Naszkicuj wykresy następujących funkcji. Odczytaj z rysunku współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji f z osią OX oraz z osią OY.

a) $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ x, & \text{jeśli } x \in \langle -1, 3\rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 4) \\ x+2, & \text{jeśli } x \in \{-4, -3, -2, -1\} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2, & \text{jeśli } x \in \{0, 1, 2\} \\ x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 9\rangle \\ x, & \text{jeśli } x \in (-4, 0) \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \\ 3 - x^2, & \text{jeśli } x \in \{-1, 0, 1\} \\ x, & \text{jeśli } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jeśli } x \in (-3, 0) \\ (x-1)^2, & \text{jeśli } x \in \{0, 1, 2\} \\ x, & \text{jeśli } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

3.38. Sprawdź, wykonując obliczenia, który z punktów podanych obok wzoru funkcji f należy do wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = -x^2 + 1$, $A(3, -8)$, $B(-2, 5)$, $C\left(\sqrt{2}, -1\right)$

b) $f(x) = x^3 - 3x$, $A(-1, -3)$, $B\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, $C\left(\sqrt[3]{-8}, \log_2 0{,}25\right)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -4) \\ -x+7, & \text{jeśli } x \in \langle -4, +\infty) \end{cases}$ $A(2, 5)$, $B(-5, 12)$, $C\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2+4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ \sqrt{2x-1}, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$ $A(0, 2)$, $B(1, 1)$, $C(-3, -5)$

3.39. Punkt A należy do wykresu funkcji f. Oblicz a, jeśli:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5ax$, $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ b) $f(x) = 2ax^3 - 4$, $A(-1, 2)$

c) $f(x) = \begin{cases} 5-3ax, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ x^2+a, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$ $A(-1, 11)$

d) $f(x) = \begin{cases} 4+2ax, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 2) \\ a-3x^2, & \text{jeśli } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$ $A(3, -8)$

3.40. Funkcja f opisana jest wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{jeśli } x \in \langle -3, -2\rangle \cup (3, 5\rangle \\ 8-2x, & \text{jeśli } x \in (-2, 3\rangle \end{cases}$

a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.
b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 4.
c) Wyznacz argumenty, dla których wartość funkcji f wynosi 3.
d) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt $A\left(\sqrt{11}, 10\right)$.

3.41. Sprawdź, wykonując obliczenia, który z punktów podanych obok wzoru funkcji f należy do wykresu tej funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} 4x+7, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -2\rangle \\ 2x^2-1, & \text{jeśli } x \in (-2, 2) \\ -2x+6, & \text{jeśli } x \in \langle 2, +\infty) \end{cases}$ $A(4, -2)$, $B\left(-\sqrt{2}, 3\right)$, $C(-\pi, 7 - 4\pi)$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}-1, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0\rangle \\ 3-\log_2 x, & \text{jeśli } x \in (0, 5) \\ 5^{x-4}, & \text{jeśli } x \in \langle 5, +\infty) \end{cases}$ $A(-8, -3)$, $B(4, 0)$, $C(5, 5)$

3.42. Wyznacz współrzędne wszystkich punktów wspólnych wykresu funkcji f z osią OX, jeśli:

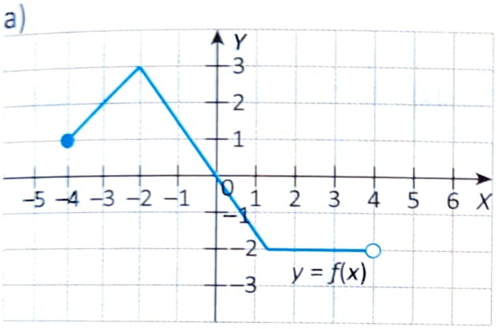
a) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+6, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-6)\\ \frac{1}{2}x^2-2, & \text{jeśli } x\in\langle -6,-1)\\ x^3+1, & \text{jeśli } x\in\langle -1,+\infty)\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2-9, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2)\\ 8-x^3, & \text{jeśli } x\in\langle -2,3)\\ 4x-6, & \text{jeśli } x\in\langle 3,+\infty)\end{cases}$

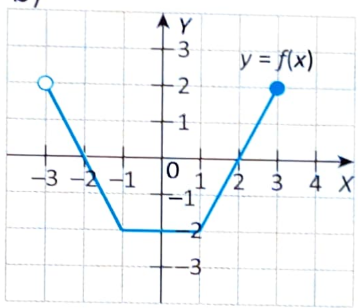
Dziedzina funkcji liczbowej

3.43. Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji. Podaj dziedzinę każdej z nich.

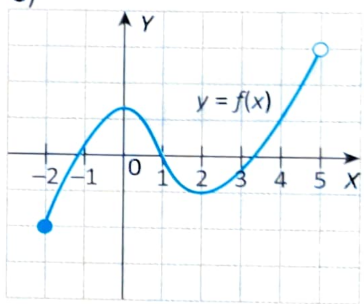
a)



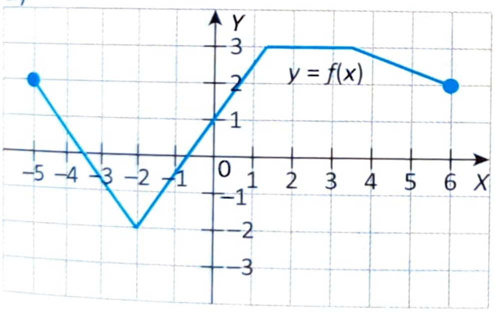
b)



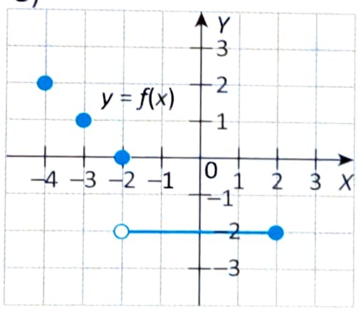
c)



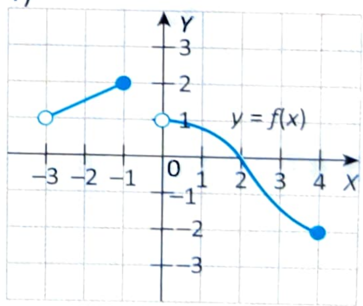
d)



e)

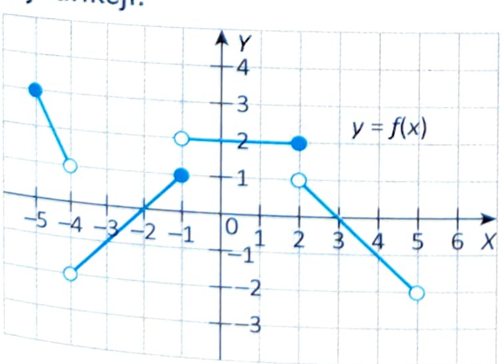


f)

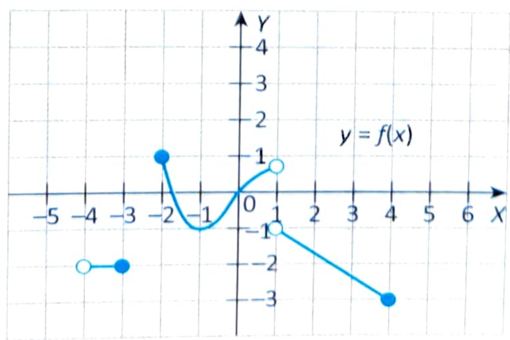


3.44. Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji. Podaj dziedzinę każdej funkcji.

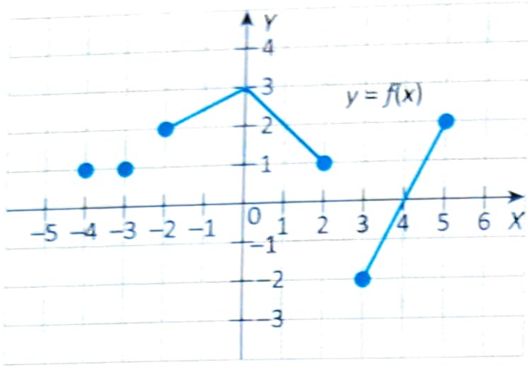
a)



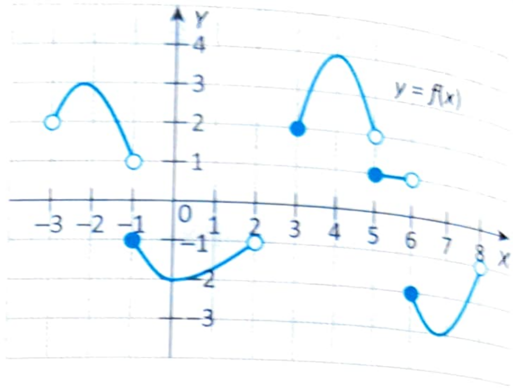
b)



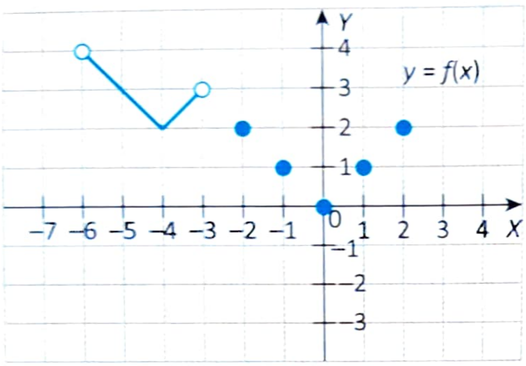
c)



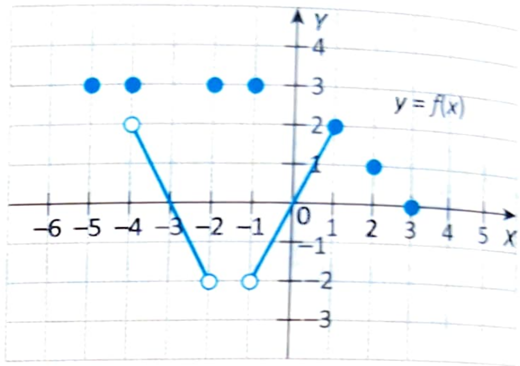
d)



e)



f)



3.45. Naszkicuj wykres przykładowej funkcji, której dziedziną jest zbiór D, jeśli:

a) $D = (-4, 1) \cup (1, 5\rangle$ b) $D = (-3, 3) \cup \{4, 5\}$

3.46. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \frac{5x-1}{3}$ b) $f(x) = \frac{x-2}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2-4}{5}$

d) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ e) $f(x) = 3x^3 - 7$ f) $f(x) = \frac{5}{3x-8}$

3.47. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \frac{x+4}{(x-1)(x+3)}$ b) $f(x) = \frac{5x}{x^2+3}$ c) $f(x) = \frac{2x-7}{x(x+8)}$

d) $f(x) = \frac{3x+2}{(3x-4)(5x-1)}$ e) $f(x) = \frac{1}{(x-9)x(x+5)}$ f) $f(x) = \frac{x^3+2}{(x+7)(x^2+1)}$

3.48. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{5}{4x^2-9}$ c) $f(x) = \frac{4+x}{16-x^2}$

d) $f(x) = \frac{2x-5}{25-4x^2}$ e) $f(x) = \frac{3x+8}{64x^2-9}$ f) $f(x) = \frac{4-5x}{81-9x^2}$

3.49. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{x+x^2}{4x^2+4x+1}$ b) $f(x)=\frac{3}{4x^2+12x+9}$ c) $f(x)=\frac{2x}{9x^2-6x+1}$

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{25x^2+20x+4}$ e) $f(x)=\frac{x+2}{9x^2+24x+16}$ f) $f(x)=\frac{2x+5}{x^2-14x+49}$

3.50. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{2}{x^2-1}+\frac{5x}{x^2+9}$ b) $f(x)=\frac{3x+5}{(x+3)(x-1)}-\frac{8}{x^2-6x+9}$

c) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+81}+\frac{x+15}{x^2+4}$ d) $f(x)=\frac{2x+1}{4x^2-121}-\frac{5}{x^2-2}$

e) $f(x)=\frac{x-6}{(2x+7)x^2}-\frac{4x}{x^2+10x+25}$ f) $f(x)=\frac{8x+3}{25x^2-50}+\frac{x+9}{4x^2-28x+49}$

3.51. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\sqrt{2x-16}$ b) $f(x)=\sqrt{8-4x}$

c) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{9-3x}}$ d) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+9}}$

e) $f(x)=\sqrt{x+4}+\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$ f) $f(x)=\frac{2x+3}{\sqrt{7-x}}-\sqrt{x+2}$

3.52. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ b) $f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$ c) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{2-x}}$

d) $f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{1-x^2}$ e) $f(x)=\frac{\sqrt{8-4x}}{x^2+2x+1}$ f) $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+2}}$

3.53. Wyznacz dziedzinę funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{4+2x}}{3x}+\frac{1}{\sqrt{5-x}}$ b) $f(x)=\frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{x+4}$

c) $f(x)=\frac{x}{(2x-8)(3x+9)}+\sqrt{7-2x}$ d) $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-3}}+\frac{x+2}{x^2-12x+36}$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{5x-10}}-\sqrt{8-2x}$ f) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-4}-\frac{x^2+1}{\sqrt{7-2x}}$

3.54. Wyznacz liczbę a, dla której dziedziną funkcji f jest podany obok wzoru funkcji zbiór D.

a) $f(x)=\frac{2x}{(x-a)(x+5)}$, $D=\mathbf{R}-\{-5,-2\}$

b) $f(x)=\frac{5}{x^2+a}$, $D=\mathbf{R}-\{-3,3\}$

c) $f(x)=\sqrt{2x+10a}$, $D=\langle 1,+\infty)$

d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3a-x}}$, $D=(-\infty,1)$

Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji

3.55. Wyznacz zbiór wartości funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\sqrt{3}$, $D_f=\{-4,-3,-2,-1,0,1\}$

b) $f(x)=3-2|x|$, $D_f=\{-8,-2,3\}$

c) $f(x)=\sqrt{2x-1}$, $D_f=\{1,5,13,25\}$

d) $f(x)=\frac{x-4}{2x}$, $D_f=\{-4,-2,1,2,3\}$

e) $f(x)=\frac{3-\log_4 x}{5}$, $D_f=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4\right\}$

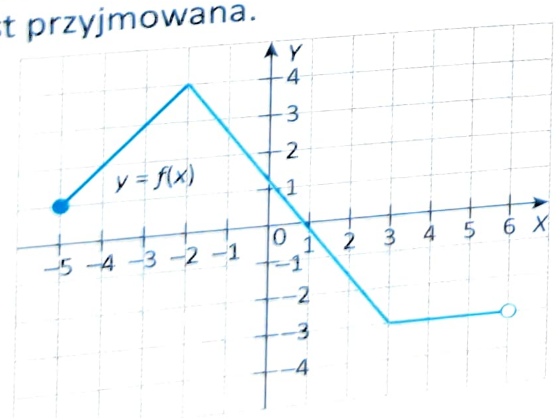
f) $f(x)=4-6\cdot 3^{x-2}$, $D_f=\{-1,0,1,2,3\}$

3.56. Funkcja f każdej liczbie naturalnej ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 4. Podaj zbiór wartości funkcji f.

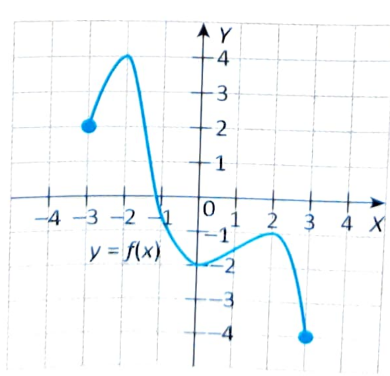
3.57. Funkcja f każdej liczbie całkowitej ze zbioru $\{-2,-1,0,4,8,10,13,15\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5. Podaj zbiór wartości funkcji f.

3.58. Na poniższych rysunkach przedstawione są wykresy funkcji. Odczytaj z wykresu zbiór wartości każdej funkcji. Podaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji, o ile istnieje, oraz argument (argumenty), dla którego (dla których) ta wartość jest przyjmowana.

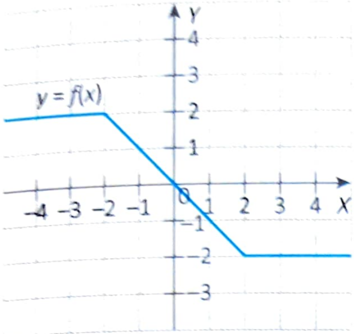
a)



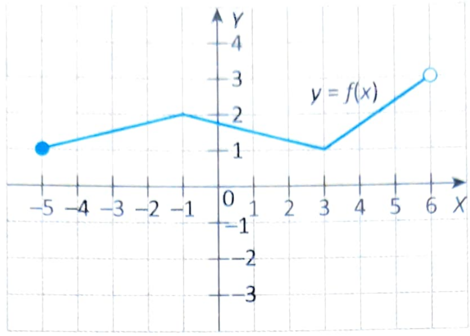
b)



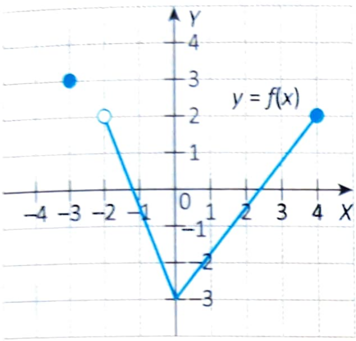
c)



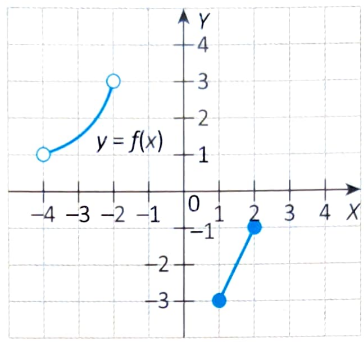
d)



e)



f)



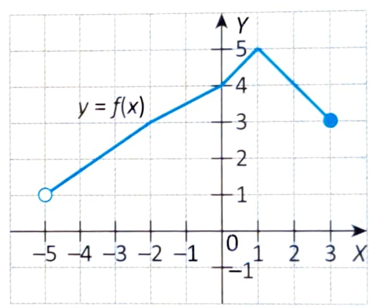
3.59 Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu odczytaj:

a) dziedzinę funkcji f

b) zbiór wartości funkcji f

c) wartość funkcji f dla argumentu (-2)

d) argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą 4.



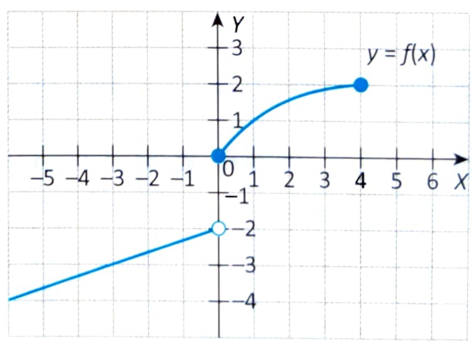
3.60. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu odczytaj:

a) dziedzinę funkcji f

b) zbiór wartości funkcji f

c) wartość funkcji f dla argumentu (-3)

d) argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą 2.



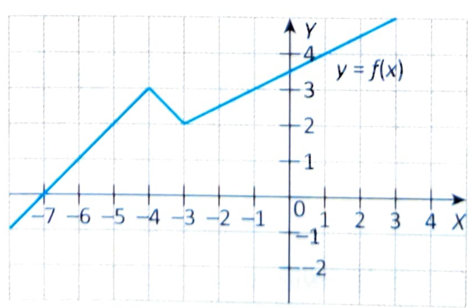
3.61. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu funkcji f:

a) podaj dziedzinę funkcji f

b) podaj zbiór wartości funkcji f

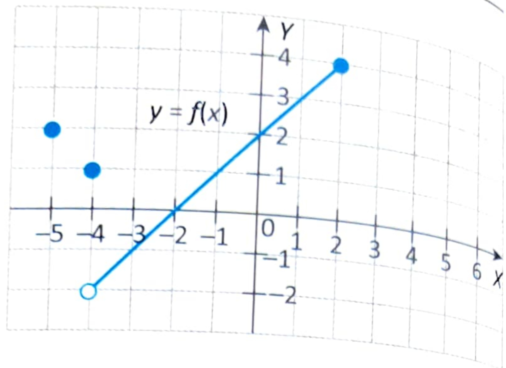
c) oblicz wartość wyrażenia $f(-5) \cdot f(-3) + f(1)$

d) odczytaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość równą 3.



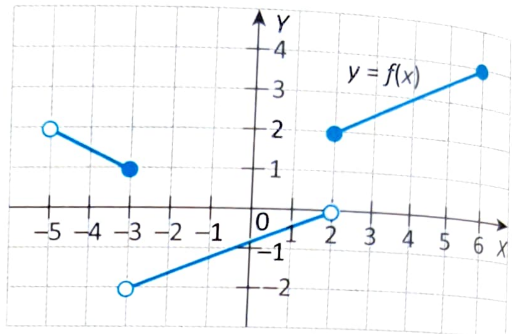
3.62. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu odczytaj:

a) dziedzinę funkcji f
b) zbiór wartości funkcji f
c) $f(-4)$ oraz $f(1)$
d) argumenty, dla których wartość funkcji wynosi 2.



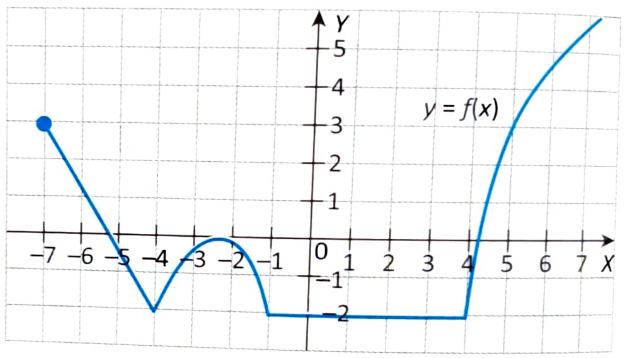
3.63. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu:

a) odczytaj dziedzinę funkcji f
b) podaj zbiór wartości funkcji f
c) oblicz wartość wyrażenia $f(2)\cdot\left[f(6)-f(-3)\right]$
d) podaj argument, dla którego wartość funkcji f wynosi 3.

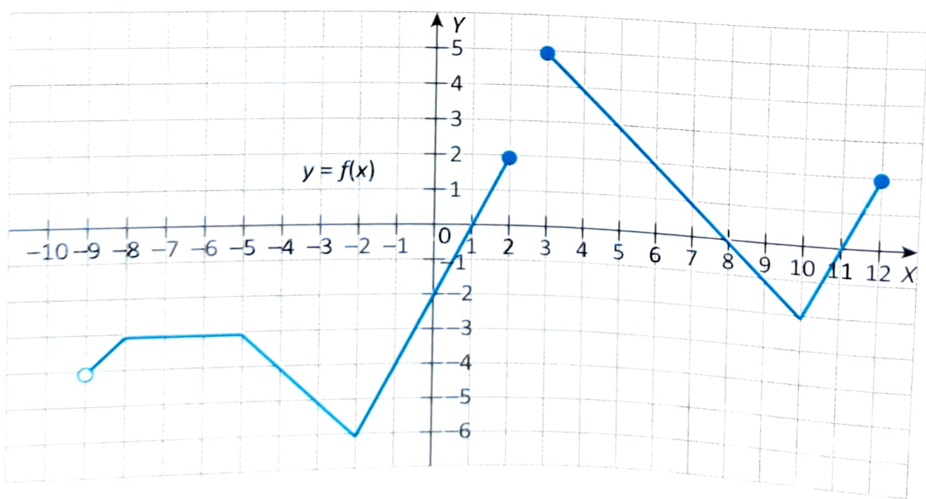


3.64. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Na podstawie wykresu odczytaj:

a) dziedzinę funkcji f
b) zbiór wartości funkcji f
c) wartość funkcji f dla argumentu 5
d) zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość.



3.65. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Na podstawie wykresu:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f
b) podaj współrzędne punktów, w których wykres funkcji przecina oś OX oraz OY

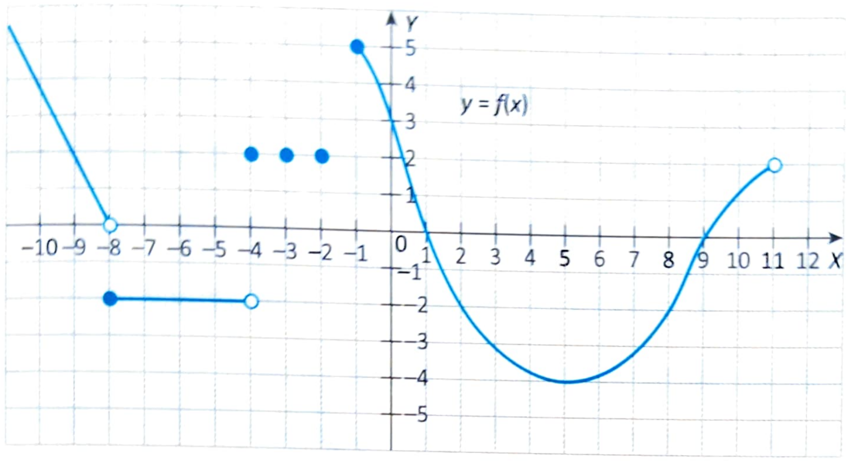
c) odczytaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji f, a także argumenty, dla których te wartości są przyjmowane

d) uzupełnij zapis:

1) $f(x) = 2 \Leftrightarrow$ ....

2) $f\left(-\sqrt{32}\right) \cdot f(-1) + \log_{\frac{1}{2}} f(4) =$ ....

3.66. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f.



Na podstawie wykresu:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f

b) podaj współrzędne punktów, w których wykres funkcji przecina oś OX oraz OY

c) odczytaj najmniejszą oraz największą wartość funkcji f, o ile istnieją, a także argumenty, dla których te wartości są przyjmowane

d) uzupełnij zapisy:

1) $f(x) = -2 \Leftrightarrow$ ....

2) $f(-1) \cdot \log_9 f(0) - f(-\pi - 2) =$ ....

3.67. Na podstawie wykresu funkcji f wyznacz zbiór wartości tej funkcji, jeśli:

a) $f(x) = x$, $D_f = (-2, +\infty)$

b) $f(x) = x$, $D_f = \langle -3, 1) \cup \langle 2, 4)$

c) $f(x) = -x$, $D_f = \langle -4, 5)$

d) $f(x) = -x$, $D_f = (-1, +\infty)$

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = (0, 4\rangle$

f) $f(x) = -\sqrt{x}$, $D_f = \langle 1, +\infty)$

3.68. Która z liczb: $-\frac{1}{2}$, 2, 5 jest wartością funkcji $g(x) = -2x + 3$, gdzie $x \in \mathbf{Z}$? Odpowiedź uzasadnij.

3.69. Która z liczb: -2, $\frac{3}{4}$, 6 jest wartością funkcji $h(x) = 3 - |x|$, gdzie $x \in \mathbf{N}$? Odpowiedź uzasadnij.

3.70. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$, gdzie $x \in \mathbf{Q}$. Sprawdź, czy do zbioru wartości funkcji f należą liczby:

a) 5 b) 1 c) $4\frac{1}{8}$ d) -1.

3.71. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-4x^2+2\sqrt{2}$, gdzie $x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}$. Sprawdź, czy do zbioru wartości funkcji f należą liczby:

a) $-\sqrt{8}$ b) 0 c) $\sqrt{8}$ d) 3

D **3.72.** Wykaż, że funkcja $f(x) = 9x^2 - 12x + 4$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, przyjmuje tylko wartości nieujemne.

D **3.73.** Wykaż, że funkcja $f(x) = x^2 - 6x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, przyjmuje najmniejszą wartość równą -9.

D **3.74.** Wykaż, że funkcja $f(x) = -4x^2 + 4x + 2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, przyjmuje największą wartość równą 3.

Miejsce zerowe funkcji

3.75. Do dziedziny funkcji f należy liczba podana obok wzoru tej funkcji. Sprawdź, czy dana liczba jest miejscem zerowym funkcji f.

a) $f(x)=\frac{-2x+7}{4}$; $3\frac{1}{2}$

b) $f(x)=0$; $\sqrt{3}$

c) $f(x)=(x-5)\log_2 x$; 5

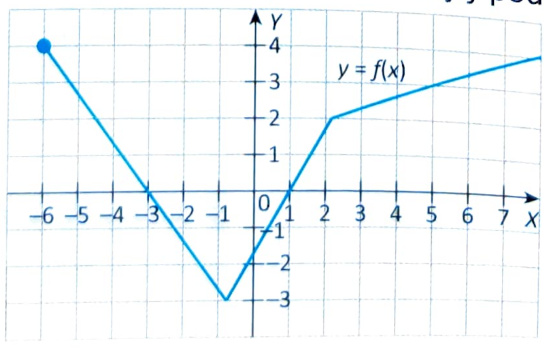
d) $f(x)=3^{x+4}-81$; 1

e) $f(x)=5$; 0

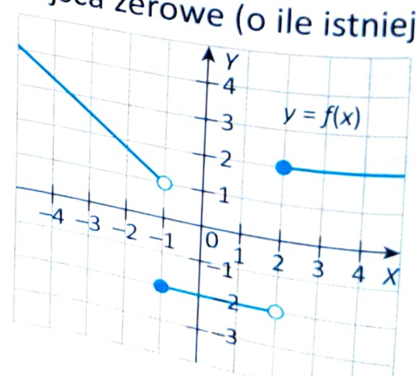
f) $f(x)=-x^2-5x-6$; -2

3.76. Na podstawie wykresu funkcji f podaj jej miejsca zerowe (o ile istnieją).

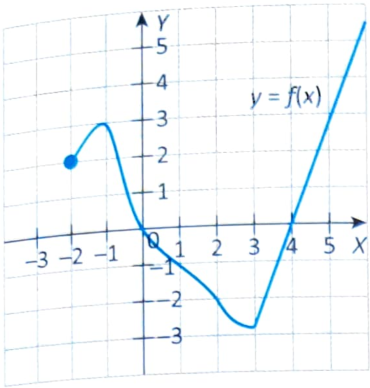
a)



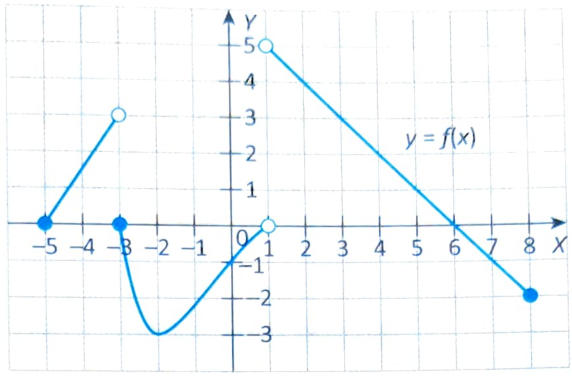
b)



c)



d)



3.77. Na podstawie tabeli opisującej funkcję f podaj jej miejsca zerowe (o ile istnieją).

a)

x	–5	–1	0	3	8
$f(x)$	6	0	4	2	0

b)

x	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–6	–5	–4	–3	–2	–1

3.78. Wyznacz dziedzinę funkcji f, a następnie sprawdź, które z podanych liczb są miejscami zerowymi funkcji f, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x+3}$; –3, –1, 0, 1

b) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2-4}$; –3, –2, 4, 5

c) $f(x)=\sqrt{3x-6}$; 2, 3, 4, 5

d) $f(x)=(x-1)(x+3)(2x-8)$; –3, –1, 2, 4

3.79. Wyznacz, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x)=8+4x,\ x\in\{-1,-2,3,4\}$

b) $f(x)=(x+8)(2x-6),\ x\in\boldsymbol{N}$

c) $f(x)=3x^2-9,\ x\in\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$

d) $f(x)=5-x^2,\ x\in\boldsymbol{Q}$

e) $f(x)=\dfrac{3x-2}{5},\ x\in\boldsymbol{R}_-$

f) $f(x)=x(x+5)(2x-1),\ x\in\boldsymbol{Z}$

3.80. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wyznacz a tak, aby miejscem zerowym funkcji f była liczba podana obok wzoru tej funkcji.

a) $f(x)=0{,}5x-4a$; 4

b) $f(x)=2a-2x^2$; 0,5

c) $f(x)=3x^3-2x^2a$; –1

d) $f(x)=\dfrac{2ax-4}{x^2+4}$; –2

3.81. Oblicz miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją). Pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny funkcji.

a) $f(x)=-3x+48$

b) $f(x)=9x^2$

c) $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{5}$

d) $f(x)=\sqrt{0{,}5x-4}$

e) $f(x)=x^2-6x+9$

f) $f(x)=x^2+36$

3.82. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz miejsca zerowe tej funkcji (o ile istnieją).

a) $f(x)=\frac{\sqrt{9-2x}}{3}$ b) $f(x)=\frac{7}{x-2}$ c) $f(x)=\frac{2x^2-50}{x}$

d) $f(x)=\frac{(3x-18)(x+1)}{x^2-9}$ e) $f(x)=\frac{x(4x+1)(x-3)}{8x+2}$ f) $f(x)=\frac{x^2+8x+16}{x^2+4x}$

3.83. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz miejsca zerowe tej funkcji (o ile istnieją).

a) $f(x)=x\cdot\sqrt{x-2}$ b) $f(x)=\frac{(2x-3)(x+5)}{7x^2}$

c) $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)\cdot\sqrt{4-x}$ d) $f(x)=\frac{x^2+1}{3x-9}$

e) $f(x)=\frac{(x-1)\left(x^2+8\right)}{4}$ f) $f(x)=\frac{5x^2-20}{\sqrt{1-x}}$

3.84. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz miejsca zerowe tej funkcji, o ile istnieją.

a) $f(x)=\frac{2x^2-4x}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{\frac{1}{3}x^2-3}{\sqrt{3-x}}$ c) $f(x)=\frac{x^2+5x}{x^2+4}$

d) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$ e) $f(x)=\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$ f) $f(x)=\frac{1-8x+16x^2}{\sqrt{4x-1}}$

3.85. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f opisanej wzorem:

a) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{jeśli } x\in\langle-3,1\rangle\\ x-2, & \text{jeśli } x\in(1,5\rangle\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0\rangle\\ 3x, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty)\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & \text{jeśli } x\in\langle-2,0\rangle\\ 2x-3, & \text{jeśli } x\in(0,2\rangle\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{jeśli } x\in(0,3\rangle\\ \sqrt{x}-3, & \text{jeśli } x\in(3,10)\end{cases}$

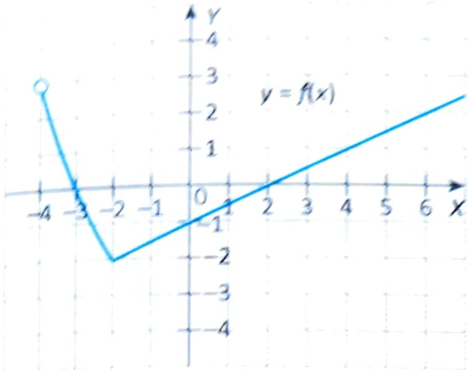
3.86. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, opisanej wzorem:

a) $f(x)=\begin{cases}9-3x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,2)\\ 5x-12, & \text{jeśli } x\in\langle2,+\infty)\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2-25, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-3)\\ \frac{1}{4}x-1, & \text{jeśli } x\in\langle-3,+\infty)\end{cases}$

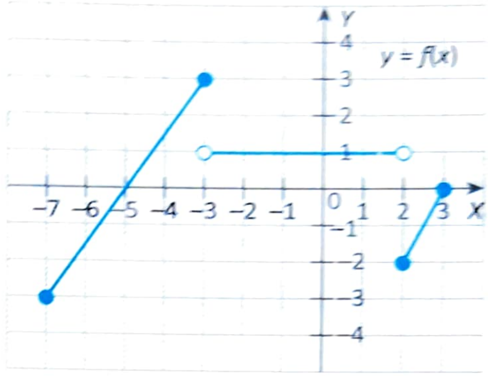
c) $f(x)=\begin{cases}(2x+1)x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,4)\\ (x-5)^2, & \text{jeśli } x\in\langle4,+\infty)\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x-4, & \text{jeśli } x\in(-\infty,8)\\ \frac{1}{4}x^2-1, & \text{jeśli } x\in\langle8,+\infty)\end{cases}$

3.87. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie oraz zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

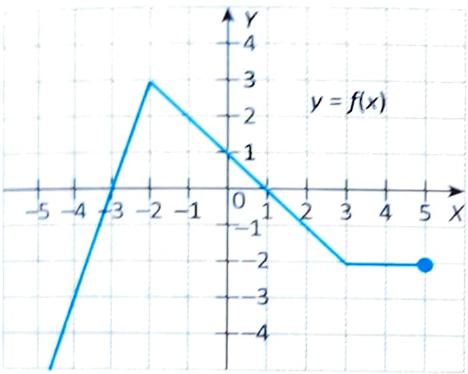
a)



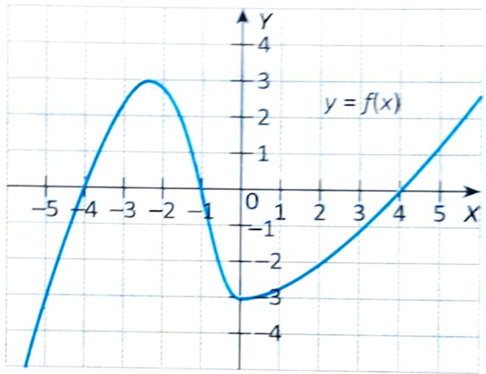
b)



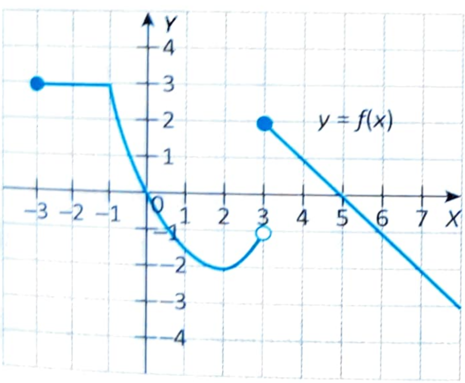
c)



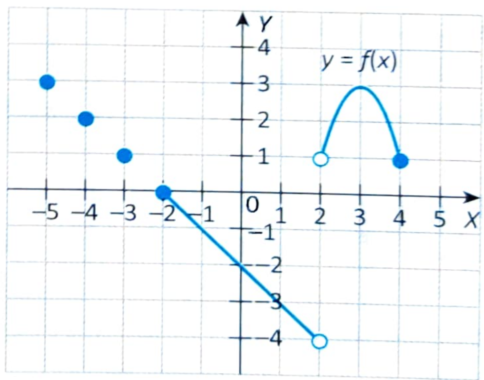
d)



e)

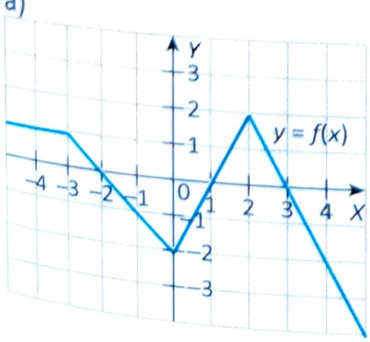


f)

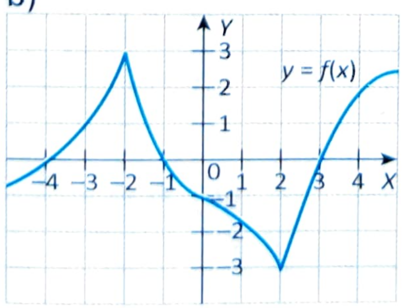


3.88. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.

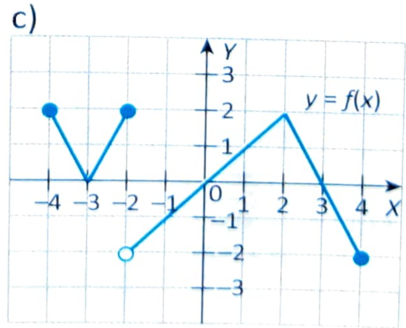
a)



b)

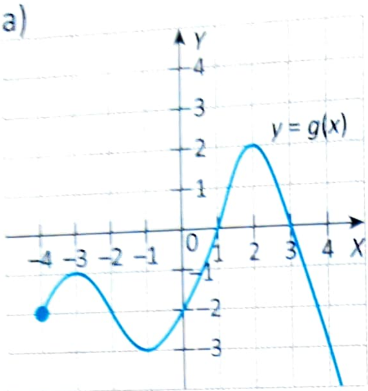


c)

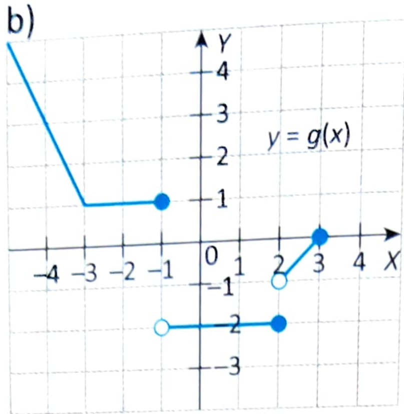


3.89. Dany jest wykres funkcji $y = g(x)$. Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartości niedodatnie.

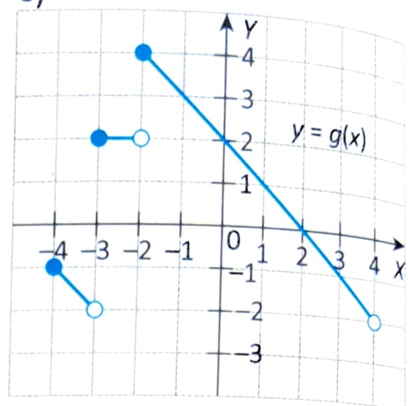
a)



b)



c)



3.90. Podaj przykład (wzór) funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych i która:

a) nie ma miejsc zerowych

b) ma jedno miejsce zerowe równe 2

c) ma dwa miejsca zerowe: (-3) oraz 5

d) ma cztery miejsca zerowe: -4, 4, 1, 8.

3.91. Podaj przykład funkcji (jej wzór), która spełnia następujące warunki:

a) dziedziną funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1, 3\}$, a jej jedynym miejscem zerowym jest liczba 5

b) dziedziną funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{0\}$ i która ma trzy miejsca zerowe: 1, -4 i 8

c) dziedziną funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{-1, 2, 7\}$ i która nie ma miejsc zerowych

d) dziedziną funkcji jest zbiór $(1, +\infty)$ i która ma dwa miejsca zerowe: 3 i 4.

3.92. Podaj przykład funkcji (jej wzór), która spełnia następujące warunki:

a) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich i która nie ma miejsc zerowych

b) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ujemnych i która ma trzy miejsca zerowe

c) dziedziną funkcji jest przedział $\langle 4, +\infty)$ i która ma jedno miejsce zerowe

d) dziedziną funkcji jest przedział $(-\infty, -3\rangle$ i która ma trzy miejsca zerowe.

3.93. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz miejsca zerowe tej funkcji (o ile istnieją).

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{4x^2+20x+25}$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2+100)(x-7)}{\sqrt{0{,}4x-2}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x+1}}{7x^2-7}$

3.94. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją).

a) $f(x)=\dfrac{9x^2+24x+16}{\sqrt{x+9}}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2-27}{\sqrt{2-x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2}{\sqrt{4-x}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^3-4x}{\sqrt{9-2x}\cdot\sqrt{x+6}}$

3.95. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem:

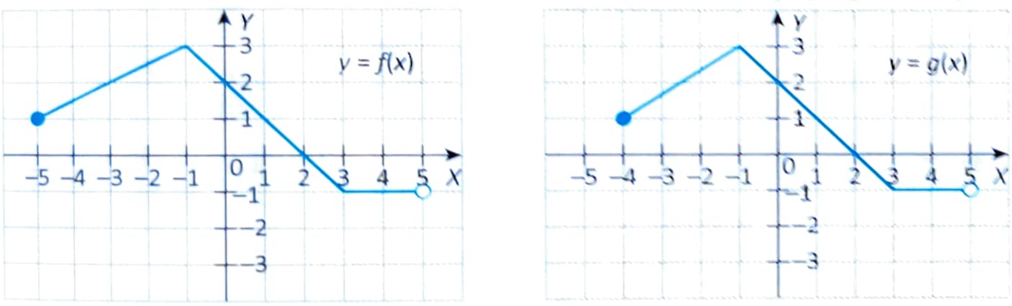
a) $f(x)=\begin{cases}9x^2+12x+4, & \text{jeśli } x\in(-\infty,3)\\ \dfrac{x-5}{x+7}, & \text{jeśli } x\in\langle 3,+\infty)\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x\left(x^2-2x+1\right), & \text{jeśli } x\in(-\infty,1)\\ 4-\sqrt{x+5}, & \text{jeśli } x\in\langle 1,+\infty)\end{cases}$

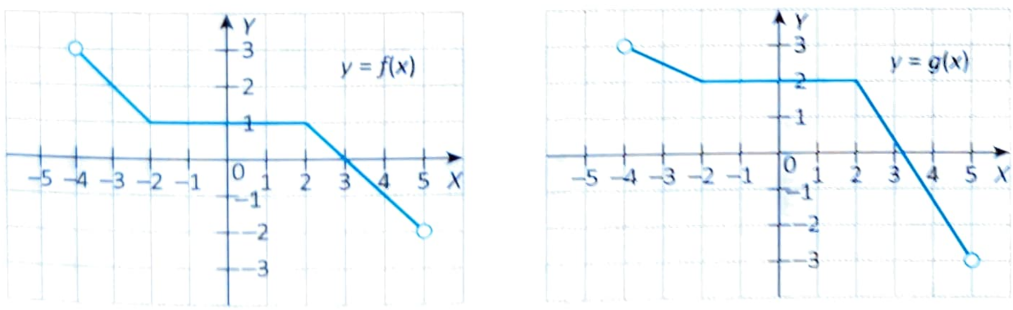
Funkcje równe

D **3.96.** Dane są wykresy funkcji f i g. Uzasadnij, że funkcje f i g nie są równe.

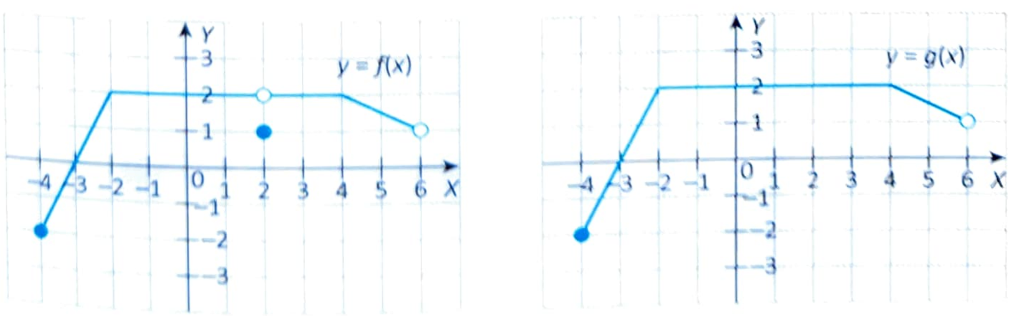
a)



b)



c)



D 3.97. Funkcje f i g są określone wzorami. Czy funkcje f i g są równe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^3}$, $x\in\{-3,-2,-1,1\}$ oraz $g(x)=x+1$, $x\in\{-3,-2,-1,1\}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$, $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ oraz $g(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$

c) $f(x)=x^2+2$, $x\in\mathbf{R}$ oraz $g(x)=\sqrt{x^4+4}$, $x\in\mathbf{R}$

d) $f(x)=x+\sqrt{2}-1$, $x\in\mathbf{R}$ oraz $g(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, $x\in\mathbf{R}$

e) $f(x)=6|x|-4x$, $x\in\mathbf{N}$ oraz $g(x)=2x$, $x\in\mathbf{N}$

f) $f(x)=|x|^2$, $x\in\mathbf{R}$ oraz $g(x)=x^2$, $x\in\mathbf{R}$.

D 3.98. Wykaż na podstawie definicji, że funkcje f i g są równe, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4x^2-12x+9}$ i $g(x)=\dfrac{1}{2x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{-3x^2-6}{x^2+2}$ i $g(x)=-3$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ i $g(x)=\dfrac{2x(1-x)}{2-2x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^2+4}$ i $g(x)=x^2-4$

D 3.99. Wykaż, że funkcje f i g nie są równe, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{4x^2-81}{2x-9}$ i $g(x)=2x+9$

b) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ i $g(x)=x^2+1$

c) $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2-6x+9}$ i $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x(1-x)}$ i $g(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x}$

3.100. Zbadaj, czy funkcje f i g są równe, jeśli:

a) $f(x)=\dfrac{0{,}2}{\sqrt{x}}$ i $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{5x}$

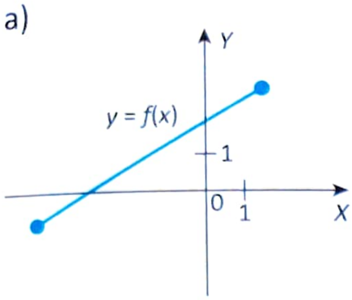
b) $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)x$ i $g(x)=\dfrac{x}{2-\sqrt{3}}$

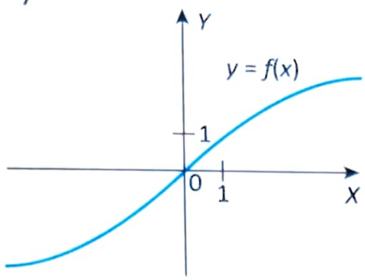
c) $f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{3}$ i $g(x)=\dfrac{x}{3}$

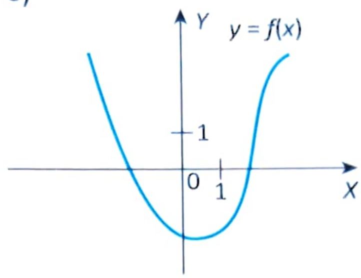
d) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ i $g(x)=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$

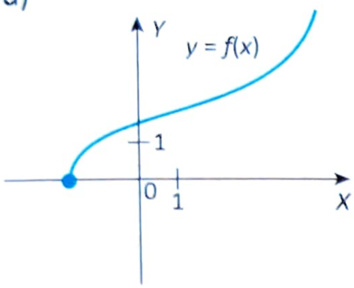
Monotoniczność funkcji

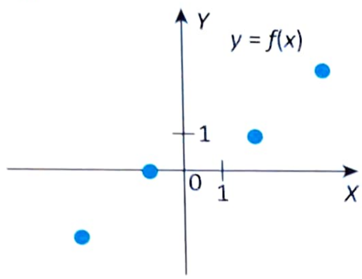
3.101. Wśród poniższych wykresów znajdują się wykresy funkcji rosnących. Wskaż je.

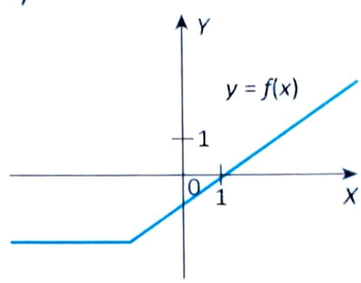
a)


b)


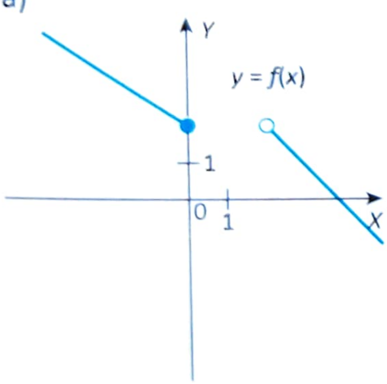
c)


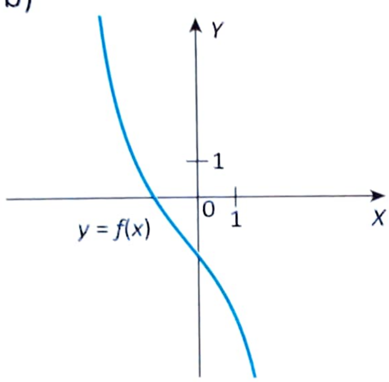
d)


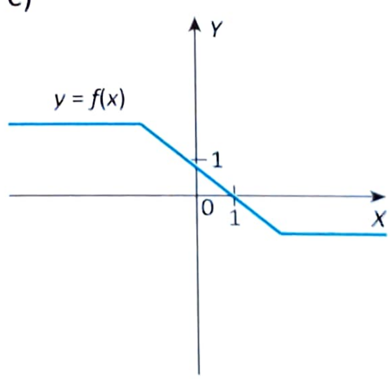
e)


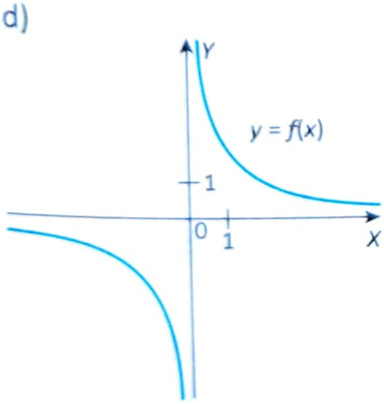
f)


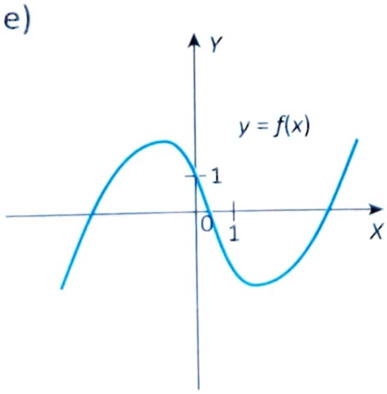
3.102. Wśród poniższych wykresów znajdują się wykresy funkcji malejących. Wskaż je.

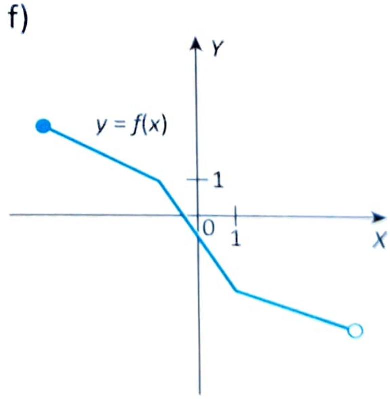
a)


b)


c)


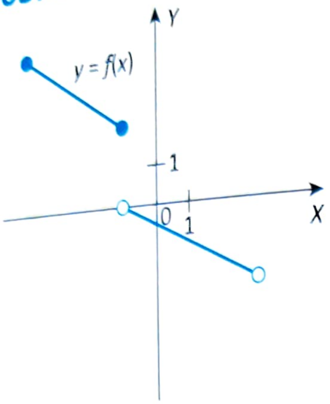
d)


e)


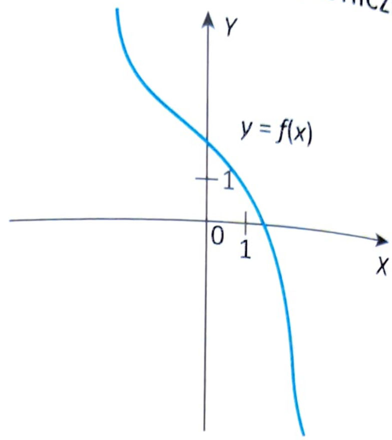
f)


3.103. Które z poniższych wykresów są wykresami funkcji monotonicznych?

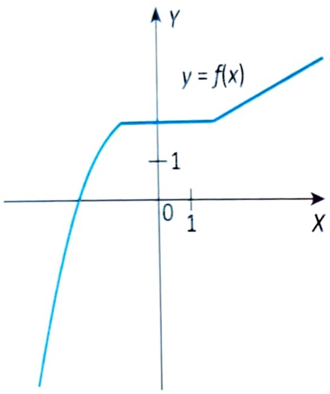
a)



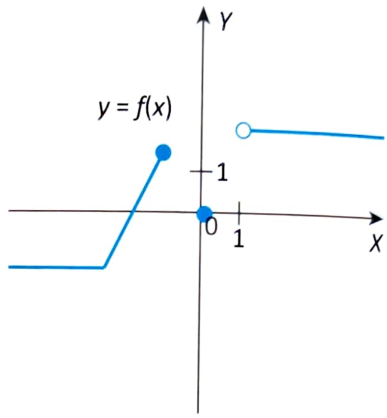
b)



c)

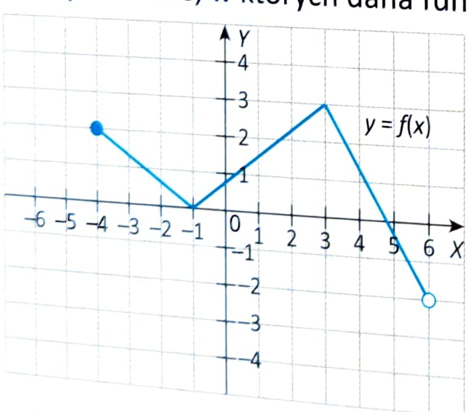


d)

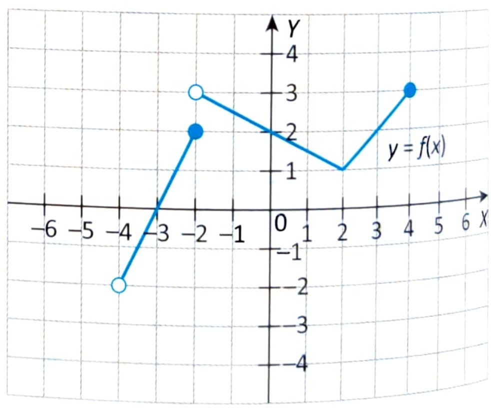


3.104. Poniżej są przedstawione wykresy pewnych funkcji. Podaj maksymalne przedziały liczbowe, w których dana funkcja jest rosnąca.

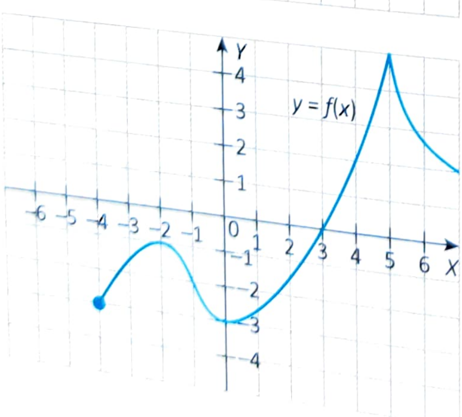
a)



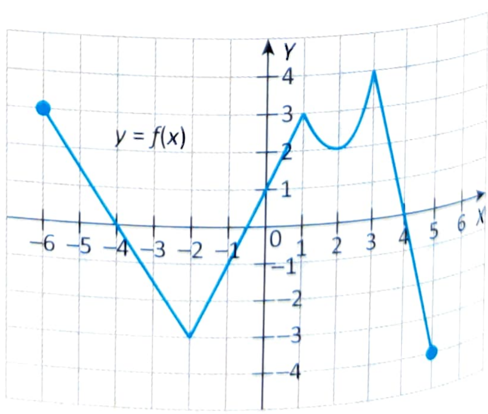
b)



c)

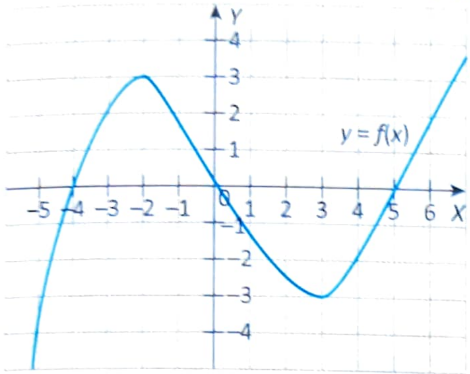


d)

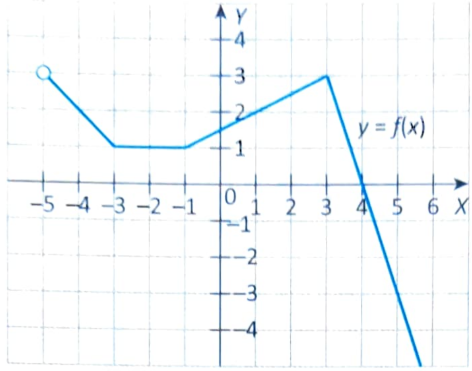


3.105. Poniżej są przedstawione wykresy pewnych funkcji. Podaj maksymalne przedziały, w których każda z funkcji jest: rosnąca, malejąca, stała.

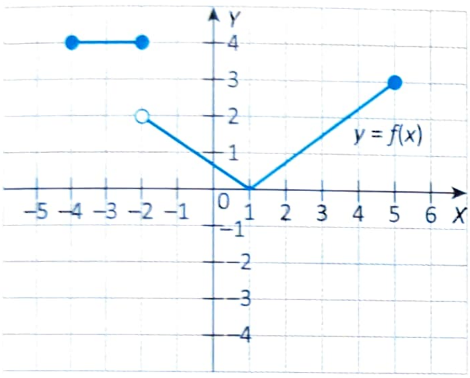
a)



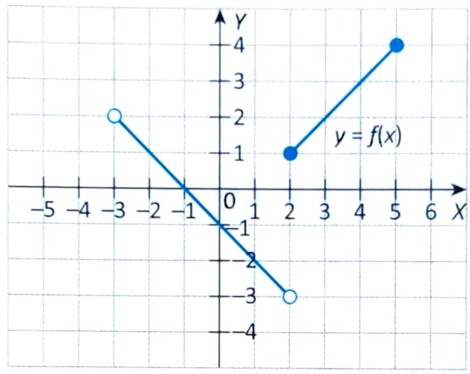
b)



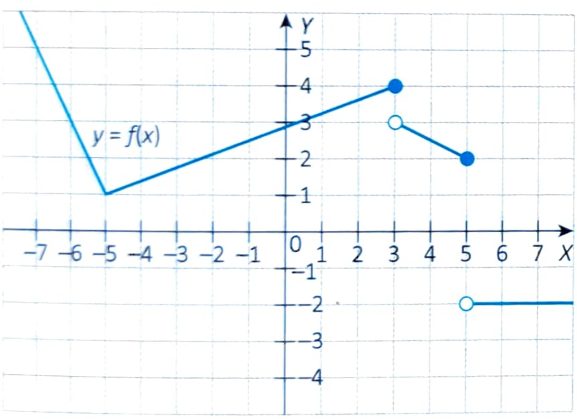
c)



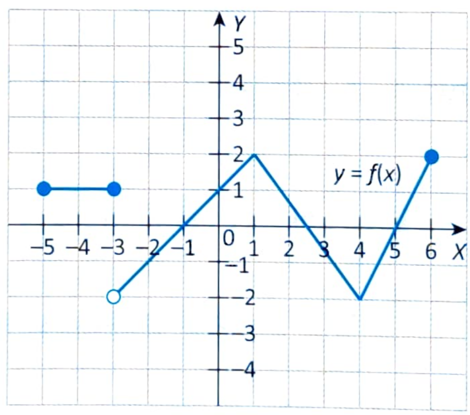
d)



e)



f)



D 3.106. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja:

a) $f(x) = 3x$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$

b) $f(x) = \sqrt{5} - 5$ jest stała w zbiorze $\boldsymbol{R}$

c) $f(x) = 4 - 6x$ jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$

d) $f(x) = -1 + \sqrt{2}x$ jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}$.

D 3.107. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja:

a) $f(x) = 0{,}5x^2$ jest rosnąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$

b) $f(x) = 3 - x^2$ jest malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$

c) $f(x) = 4 - 5x^2$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$

d) $f(x) = 3x^2 + 2$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$.

D 3.108. Wykaż, że funkcja f opisana wzorem $f(x)=\frac{2}{x}$:

a) jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$
b) jest malejąca w przedziale $(0, +\infty)$
c) nie jest malejąca w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{0\}$.

D 3.109. Wykaż, że funkcja f opisana wzorem $f(x)=\frac{-4}{x}$:

a) jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$
b) jest rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$
c) nie jest rosnąca w zbiorze $\boldsymbol{R}-\{0\}$.

D 3.110. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=(x+2)^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Wykaż, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -2, +\infty)$.

D 3.111. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=-(x-4)^2$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. Wykaż, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 4\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 4, +\infty)$.

D 3.112. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} \frac{3x}{2}, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1\rangle \\ -5x^2, & \text{jeśli } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. Wykaż, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$ i malejąca w przedziale $(1, +\infty)$.

D 3.113. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{x}, & \text{jeśli } x<-2 \\ -(x+3)^2, & \text{jeśli } x \geq -2 \end{cases}$. Wykaż, że funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -2)$ oraz $\langle -2, +\infty)$.

D 3.114. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x)=\sqrt{x+4}$ jest rosnąca
b) $f(x)=-3\sqrt{x}$ jest malejąca
c) $f(x)=\sqrt{3-x}$ jest malejąca
d) $f(x)=\sqrt{2x+4}$ jest rosnąca.

3.115. Zbadaj monotoniczność funkcji:

a) $f(x)=x^2+6x+9$ w przedziale $\langle -3, +\infty)$
b) $f(x)=\frac{2-x}{3x}$ w przedziale $(0, +\infty)$
c) $f(x)=\sqrt{8-2x}$ w przedziale $(-\infty, 4\rangle$
d) $f(x)=|4x|$ w przedziale $(-\infty, 0\rangle$.

Funkcje różnowartościowe

3.116. Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

a)

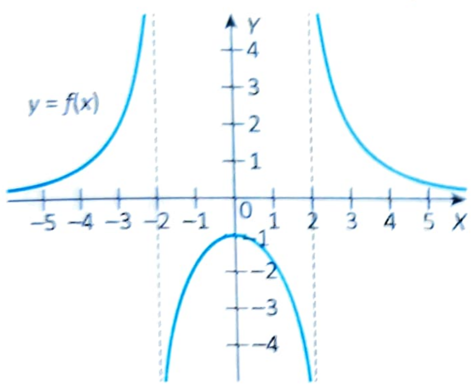
x	−3	−1	0	1	2
$f(x)$	−5	−3	−2	−1	0

b)

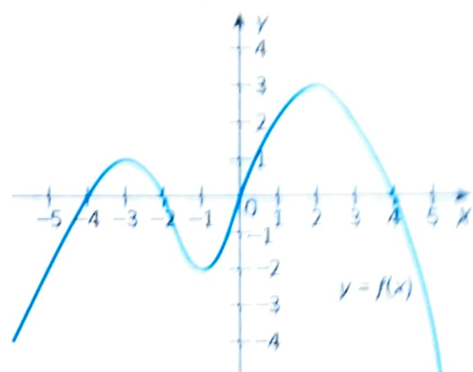
x	−2	1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	2	4

3.117. Na rysunku są przedstawione wykresy pewnych funkcji. Która funkcja jest różnowartościowa, a która nie jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

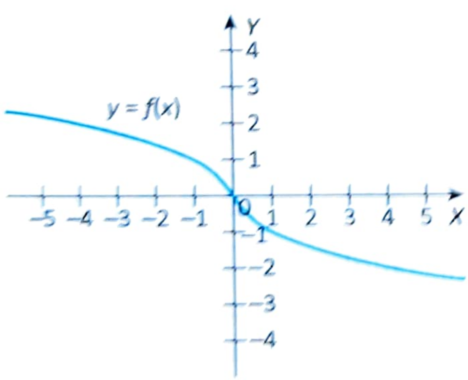
a)



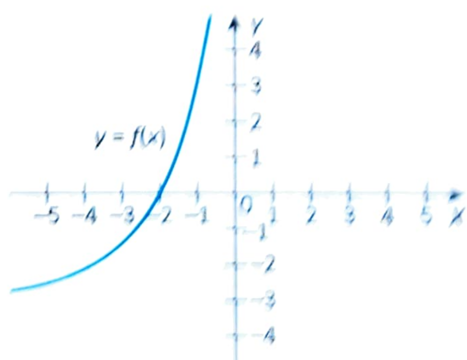
b)



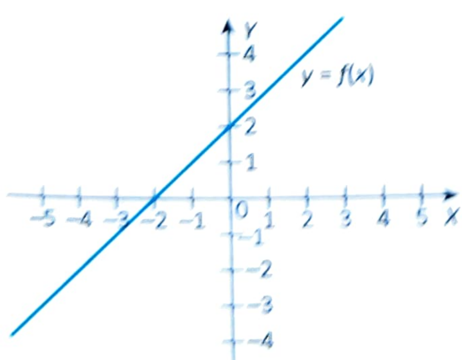
c)



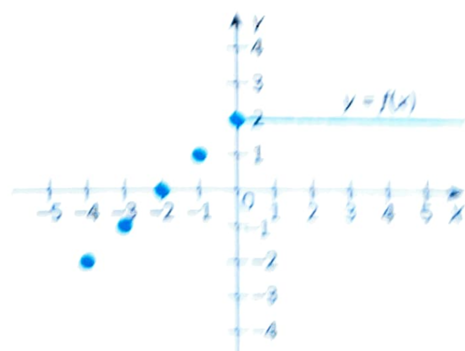
d)



e)

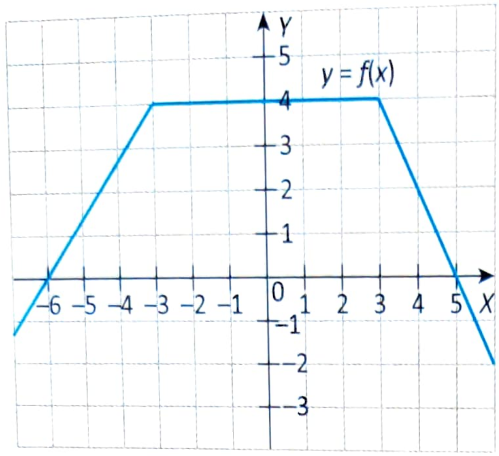


f)

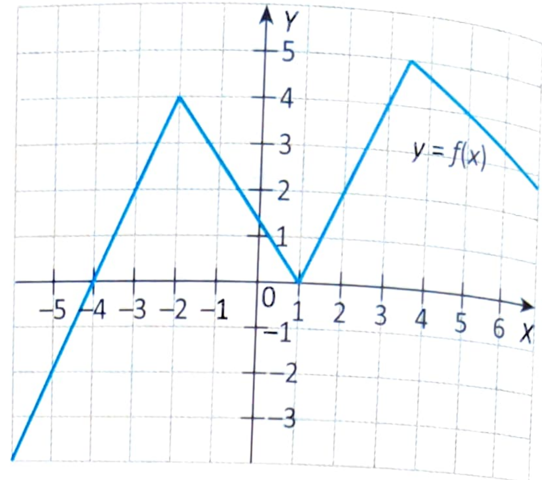


3.118. Na poniższym rysunku są przedstawione wykresy pewnych funkcji, które nie są różnowartościowe. Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartość funkcji f jest równa 4.

a)



b)



3.119. Sprawdź, które z poniższych funkcji są różnowartościowe.

a) $f(x) = |x-1| - 1$, gdzie $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$, gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 2\}$

c) $f(x) = x^3 - x$, gdzie $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

d) $f(x) = -2x^2 + 4$, gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

e) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, & \text{jeśli } x \in \{-3, -2, -1, 0\} \\ x, & \text{jeśli } x \in (0, +\infty) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x}, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$

3.120. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej różnej od zera przyporządkowuje jej odwrotność. Czy funkcja ta jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

3.121. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje liczbę do niej przeciwną. Czy funkcja ta jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

3.122. Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5. Czy funkcja ta jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

3.123. Kiedy funkcja monotoniczna jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

D **3.124.** Dany jest wzór funkcji f, określonej w zbiorze $\mathbf{R}$. Wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x$

b) $f(x) = -5x$

c) $f(x) = \sqrt{2}x + 1$

d) $f(x) = -4x + 8$

e) $f(x) = \dfrac{3-x}{2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x+8}{5}$

D 3.125. Dany jest wzór funkcji f. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Następnie wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa.

a) $f(x)=\frac{5}{x}$ b) $f(x)=3-\frac{x}{4}$ c) $f(x)=\frac{2}{x-1}+4$

d) $f(x)=5-\frac{x}{x+1}$ e) $f(x)=\frac{6-x}{x+3}$ f) $f(x)=\frac{\sqrt{3}x-2}{4x-3}$

D 3.126. Dany jest wzór funkcji f. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Następnie wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa.

a) $f(x)=\sqrt{x}$ b) $f(x)=\sqrt{-x}$ c) $f(x)=2\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x+1}$ e) $f(x)=2\sqrt{3-x}$ f) $f(x)=-4\sqrt{x+5}+9$

D 3.127. Dany jest wzór funkcji f. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Następnie wykaż, że funkcja f nie jest różnowartościowa.

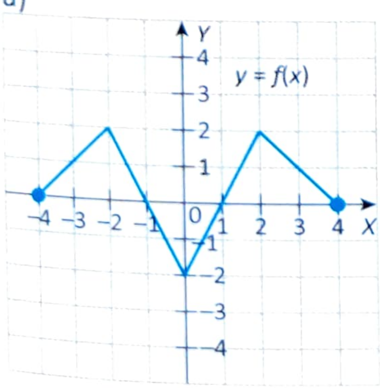
a) $f(x)=8$ b) $f(x)=3x^2$ c) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$

d) $f(x)=2|x|+3$ e) $f(x)=|x-7|$ f) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

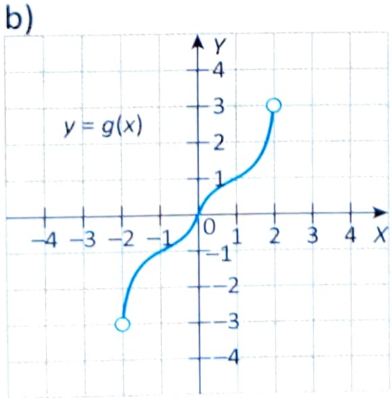
Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

3.128. Poniżej przedstawione są wykresy pewnych funkcji. Odczytaj z wykresu dziedzinę każdej funkcji. Wskaż funkcje parzyste, nieparzyste, parzyste i nieparzyste jednocześnie oraz te, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste. Które z tych funkcji są różnowartościowe?

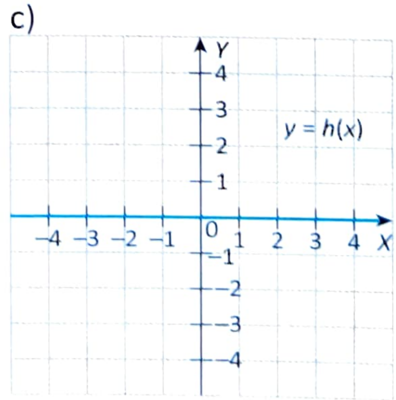
a)



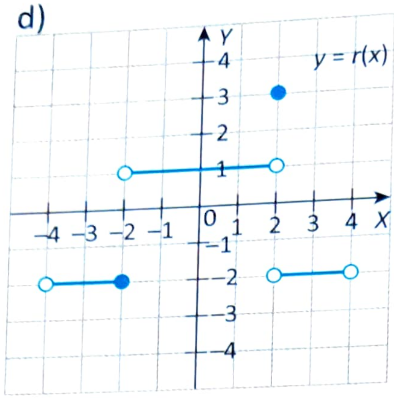
b)



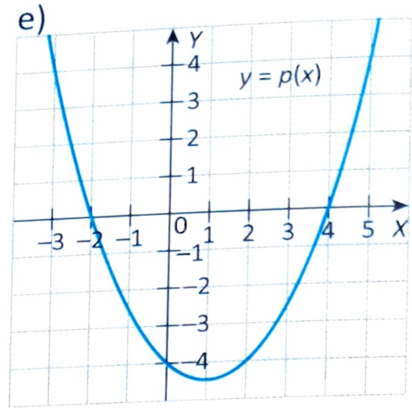
c)



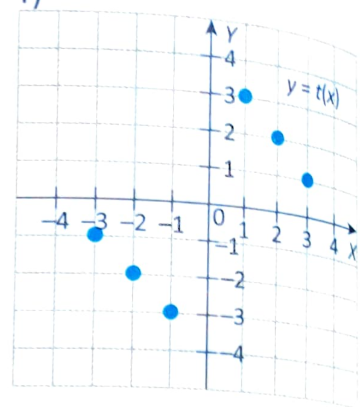
d)



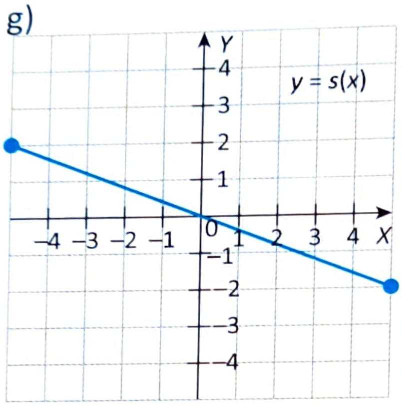
e)



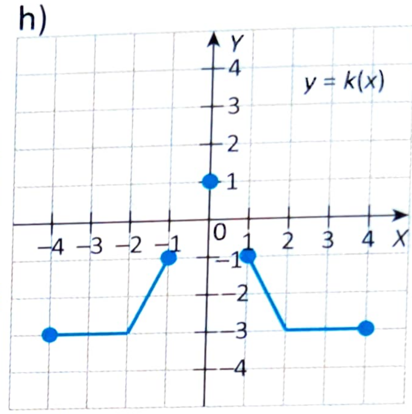
f)



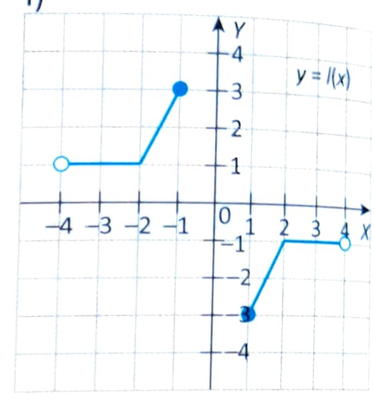
g)



h)



i)

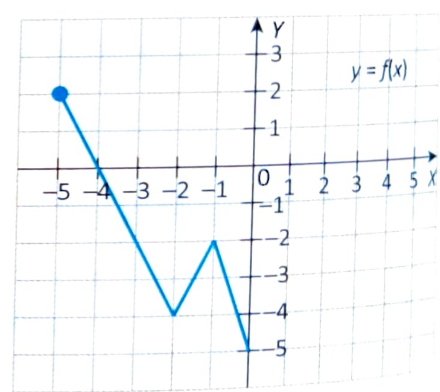


3.129. Rysunek obok przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji parzystej $y = f(x)$, której dziedziną jest przedział $\langle -5, 5\rangle$. Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji, a następnie podaj:

a) miejsca zerowe funkcji f

b) przedziały monotoniczności funkcji f

c) zbiór wartości funkcji f.

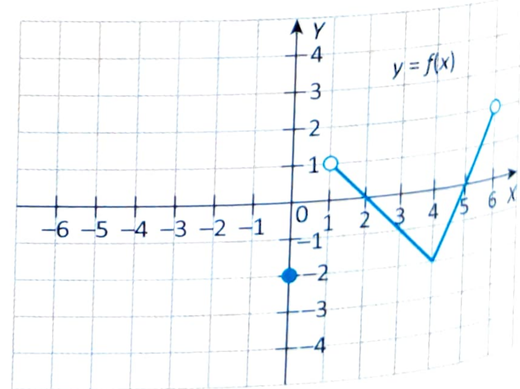


3.130. Rysunek obok przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji parzystej $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $(-6, -1) \cup (1, 6) \cup \{0\}$. Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji, a następnie podaj:

a) najmniejszą wartość funkcji f i dla jakich argumentów jest ona przyjmowana

b) zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne

c) wartość sumy miejsc zerowych.

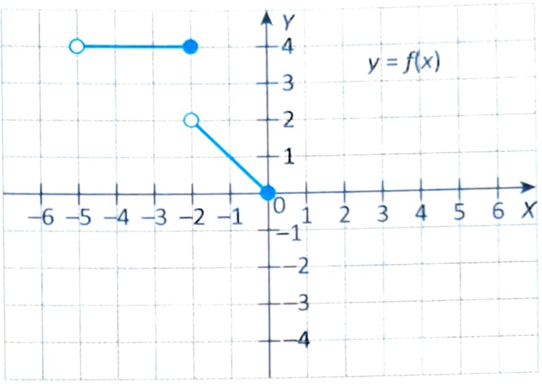


3.131. Rysunek obok przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji nieparzystej, $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $(-5, 5)$. Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji, a następnie odczytaj z rysunku:

a) zbiór wartości funkcji f

b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość -4

c) wartość funkcji f dla argumentu $(-\pi)$.

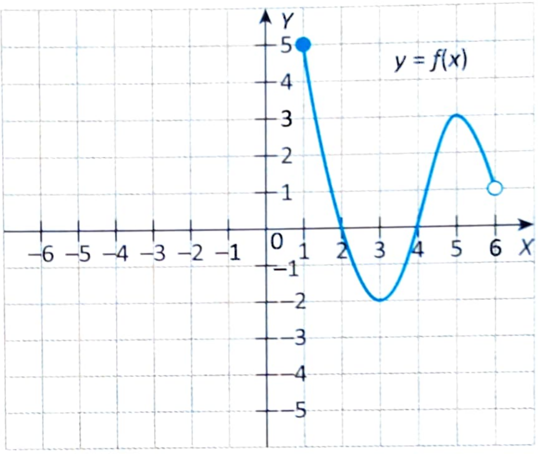


3.132. Rysunek obok przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji nieparzystej $y = f(x)$, której dziedziną jest zbiór $\langle -6, -1\rangle \cup \langle 1, 6)$. Dorysuj brakujący fragment wykresu funkcji, a następnie podaj:

a) miejsca zerowe funkcji f

b) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne

c) maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.



3.133. Podaj wzór przykładowej funkcji parzystej, której dziedziną jest zbiór:

a) $\boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{R} - \{0\}$

3.134. Podaj wzór przykładowej funkcji nieparzystej, której dziedziną jest zbiór:

a) $\boldsymbol{R}$ b) $\boldsymbol{R} - \{0\}$

D 3.135. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f określona poniższym wzorem jest parzysta.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{5x^2}{x^2 + 3}$

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ e) $f(x) = \frac{x^6 + 4}{(3 - x)(3 + x)}$ f) $f(x) = \frac{x^4}{(x + 7)(7 - x)}$

D 3.136. Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f określona poniższym wzorem jest nieparzysta.

a) $f(x) = -0{,}75x$ b) $f(x) = 4x^3 + 2x$ c) $f(x) = \frac{8}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x}$ e) $f(x) = \frac{x^5 - 8x}{(x - 1)(x + 1)}$ f) $f(x) = \frac{12 + x^8}{x - x^3}$

D 3.137. Wykaż, że funkcja $f(x)=2\sqrt{x}-2\sqrt{-x}$ jest jednocześnie funkcją parzystą i funkcją nieparzystą.

D 3.138. Wykaż, że funkcja f określona poniższym wzorem, nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

a) $f(x)=2x-3$ b) $f(x)=x^3+x^2$ c) $f(x)=x^2-6x+2$

d) $f(x)=\sqrt{x+4}$ e) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2+1}$ f) $f(x)=\dfrac{6-x}{(x-1)(x+1)}$

3.139. Zbadaj parzystość funkcji określonej wzorem:

a) $f(x)=-x+2$ b) $f(x)=\dfrac{5x^2-9}{8}$ c) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+10}$

d) $f(x)=\dfrac{3x^2-7}{4x^4}$ e) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}$ f) $f(x)=\dfrac{x^5+9}{x^2+4}$

3.140. Dany wzór funkcji f określonej w zbiorze $\boldsymbol{R}$ zapisz w postaci sumy wzorów dwóch funkcji: parzystej g oraz nieparzystej h.

a) $f(x)=3x+8$ b) $f(x)=9x^2+6x-2$ c) $f(x)=5^x$

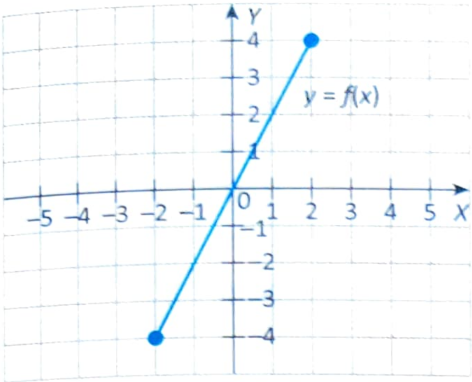
d) $f(x)=x^3-x+6$ e) $f(x)=\dfrac{x^4-3x+1}{x^4+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5x^3-2}{x^2+1}$

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach

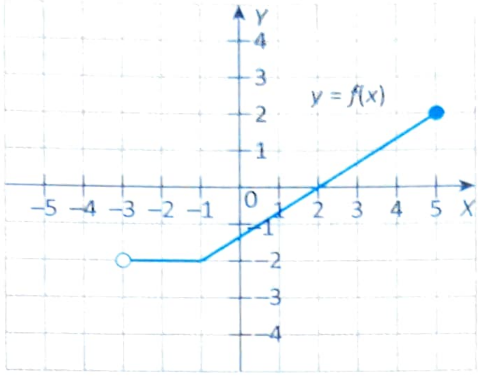
3.141. Poniżej są przedstawione wykresy pewnych funkcji. Omów własności tych funkcji według następującego porządku:

1) dziedzina funkcji
2) zbiór wartości funkcji
3) miejsca zerowe funkcji
4) zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (wartości ujemne)
5) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji
6) różnowartościowość funkcji
7) najmniejsza oraz największa wartość funkcji.

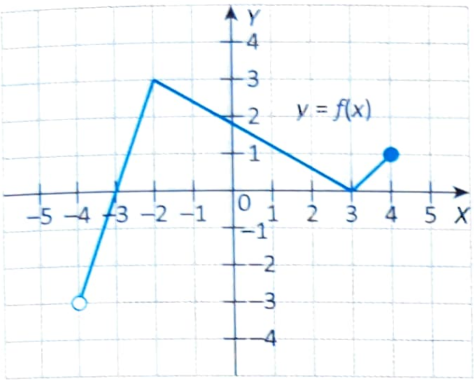
a)



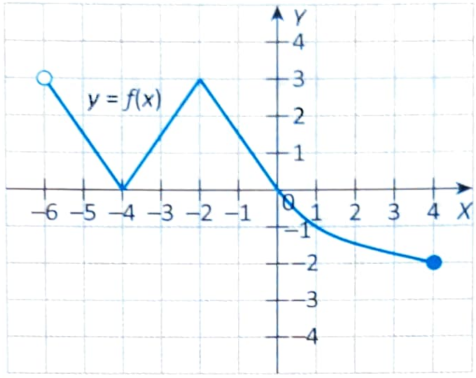
b)



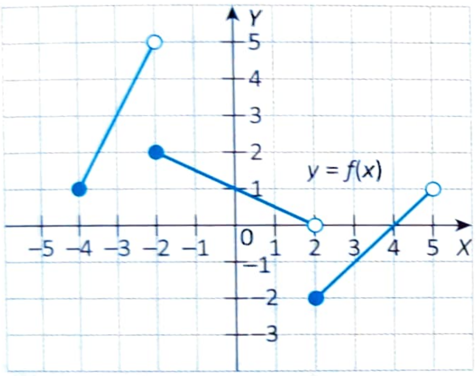
c)



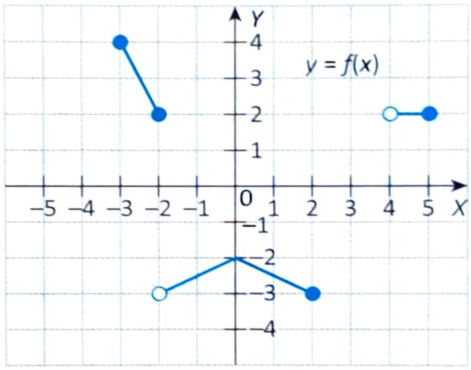
d)



e)



f)



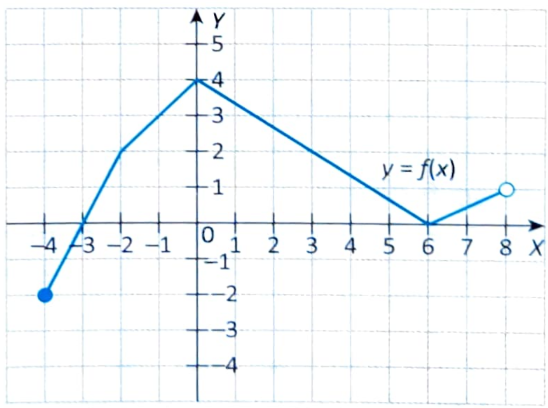
3.142. Na podstawie wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku obok, odpowiedz na poniższe pytania.

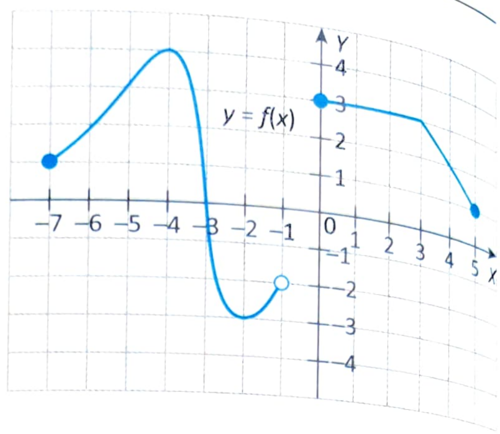
a) Jaka jest dziedzina i zbiór wartości funkcji f?

b) Dla jakich argumentów wartość funkcji f wynosi 2?

c) W jakim przedziale funkcja f jest rosnąca?

d) Dla jakiego argumentu wartość funkcji f jest największa? Ile wynosi największa wartość funkcji?





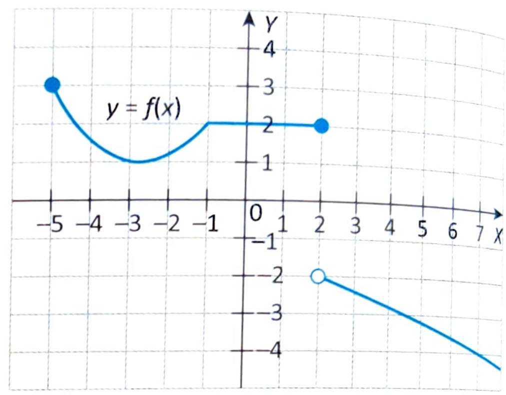
3.143. Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku obok. Na podstawie wykresu funkcji:

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

b) Oblicz wartość wyrażenia $f(-4) \cdot [f(-2) - f(5)]$.

c) Podaj przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

d) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



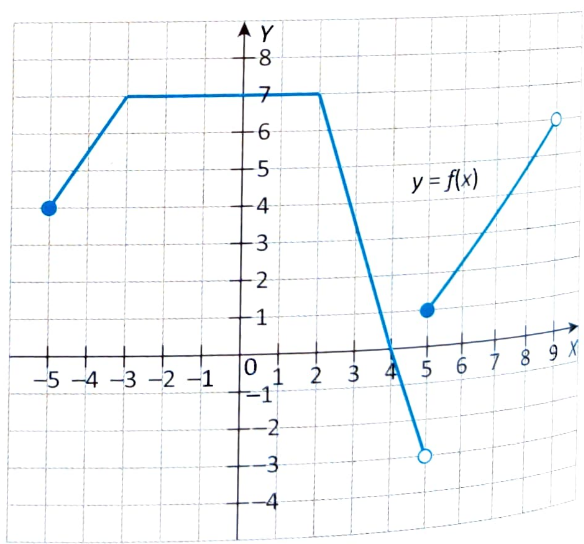
3.144. Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku obok. Na podstawie wykresu funkcji:

a) Podaj zbiór wartości funkcji f.

b) Uzupełnij zapis:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow$ ....
$f(x) < 0 \Leftrightarrow$ ....

c) Uzasadnij, że funkcja nie jest różnowartościowa.

d) Wskaż argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość największą. Czy istnieje najmniejsza wartość tej funkcji?



3.145. Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku obok. Na podstawie wykresu funkcji:

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

b) Odczytaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

c) Określ przedziały monotoniczności funkcji f.

d) Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą wartość. Jaka jest największa wartość funkcji? Czy funkcja przyjmuje najmniejszą wartość?

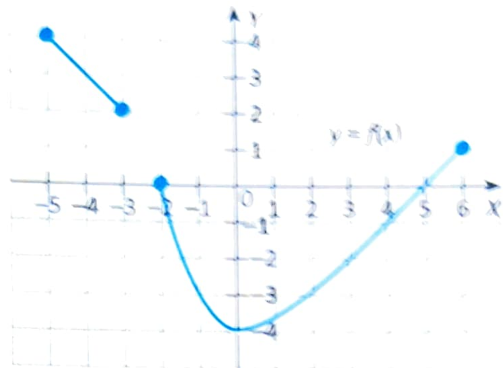
3.146. Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku obok. Na podstawie tego wykresu:

a) Oblicz wartość wyrażenia $f(-5)+f(0)-2f(6)$.

b) Podaj zbiór wartości funkcji f.

c) Podaj miejsca zerowe funkcji f.

d) Uzupełnij zapis:
$f(x)>0 \Leftrightarrow$ ....



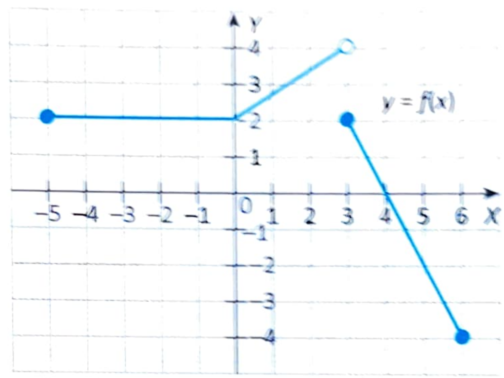
3.147. Wykres funkcji f jest przedstawiony na rysunku obok. Na podstawie tego wykresu podaj:

a) dziedzinę funkcji f;

b) zbiór wszystkich tych argumentów, dla których wartość funkcji f wynosi 2;

c) najmniejszą oraz największą wartość funkcji f (o ile istnieją);

d) maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.



3.148. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{jeśli } x\in\{-2,-1,0\}\\ 3-x, & \text{jeśli } x\in\{1,2,3,4\}\end{cases}$

Następnie:

a) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji f.

b) Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są niedodatnie.

c) Oblicz iloczyn argumentów, dla których funkcja f przyjmuje największą i najmniejszą wartość.

3.149. Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem
$f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x}, & \text{jeśli } x\in\{-4,-2,-1,1,2\}\\ 3, & \text{jeśli } x\in\{0,3,4,5\}\end{cases}$. Następnie odpowiedz na pytania poniżej.

a) Czy zachodzi równość $f(-2)\cdot f(-1)=f(1)\cdot f(2)$?

b) Czy funkcja f jest różnowartościowa?

c) Czy funkcja f ma miejsca zerowe?

D 3.150. Narysuj wykres funkcji określonej wzorem
$f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{x}, & \text{jeśli } x\in\{0,1,4,9\}\\ \frac{x}{2}, & \text{jeśli } x\in\{-6,-4,-2\}\end{cases}$

Następnie:

a) Uzasadnij, że funkcja f jest różnowartościowa.

b) Uzasadnij, że dla każdego argumentu $x \in D_f$ prawdziwa jest nierówność $-3 \le f(x) \le 3$.

c) Oblicz wartość wyrażenia: $\log_{\frac{1}{4}} f(1) + \left(\frac{1}{3}\right)^{f(-4)} - [f(-6)]^{f(9)}$.

3.151. Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie omów własności funkcji.

a) $f(x)=\begin{cases} 2, \text{ jeśli } x\in\langle -4,-2) \\ -x, \text{ jeśli } x\in\langle -2,4) \\ \sqrt{x}, \text{ jeśli } x\in\langle 4,9) \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-2) \\ |x|, \text{ jeśli } x\in\langle -2,4\rangle \\ 4, \text{ jeśli } x\in(4,+\infty) \end{cases}$

3.152. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -5, 6)$
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $ZW_f = (-2, 4\rangle$
- f jest malejąca w przedziale $\langle 1, 6)$
- jedynym miejscem zerowym funkcji f jest liczba 4
- $f(-4) = 3$.

3.153. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -6, 5\rangle$
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $ZW_f = \langle -4, 4\rangle$
- do wykresu funkcji f należy punkt $A(0, 3)$
- w przedziale $\langle 1, 5\rangle$ funkcja f jest malejąca
- funkcja f jest różnowartościowa.

3.154. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty, 5\rangle$
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $ZW_f = \langle -2, +\infty)$
- funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -5\rangle$, $\langle -2, 0\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$
- funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -5, -2\rangle$
- funkcja f jest stała w przedziale $\langle 0, 3)$
- funkcja f ma dwa miejsca zerowe: -7 oraz -4.

3.155. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -6, 6\rangle$
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $ZW_f = \langle -2, 7\rangle$
- funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -3, -2\rangle$, $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$
- $f(-1) = f(1) = 0$
- funkcja f jest parzysta.

3.156. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
- dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \langle -5, 0) \cup (0, 5\rangle$
- zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $ZW_f = \langle -6, -1\rangle \cup \langle 1, 6\rangle$
- funkcja f jest nieparzysta
- punkt $A(-3, 5)$ należy do wykresu funkcji f
- w przedziale $(0, 2\rangle$ funkcja f jest malejąca.

3.157. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
- $D_f = \langle -4, 3\rangle$
- $ZW_f = \langle -3, 3\rangle$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$
- $f(-2) = -3$
- funkcja f jest stała w przedziale $\langle 2, 3\rangle$.

3.158. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
- $D_f = (-3, 6\rangle$
- $f(0) = 3$
- funkcja f jest malejąca w przedziale $(-3, 0\rangle$
- funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0, 4\rangle$
- funkcja f jest stała w przedziale $(4, 6\rangle$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (4, 6\rangle$.

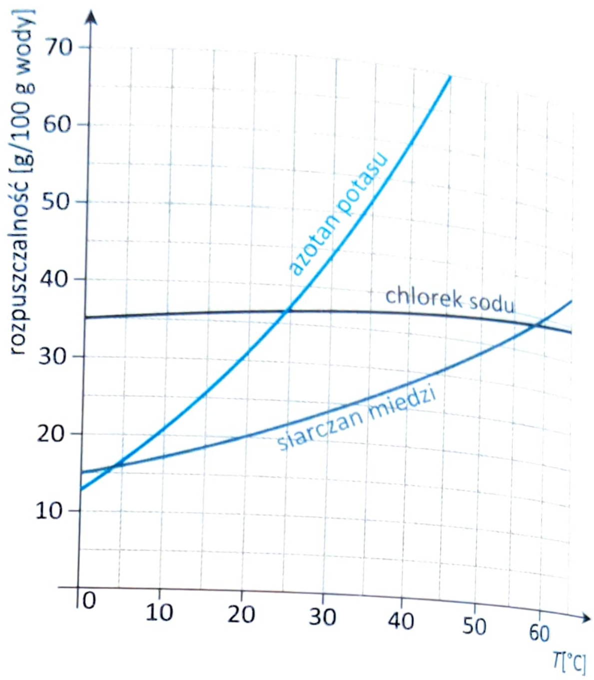
3.159. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:
- $ZW_f = \langle 1, 3) \cup (4, 5\rangle$
- $f(0) = 2$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -4, 2) \cup (3, 5\rangle$
- funkcja f jest różnowartościowa.

Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

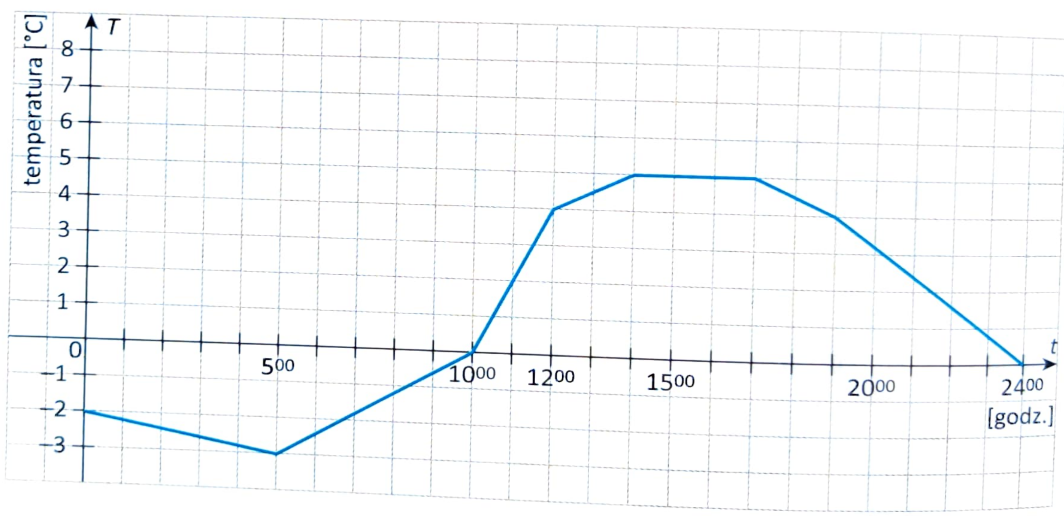
3.160. Przez rozpuszczalność substancji rozumiemy maksymalną ilość tej substancji, wyrażoną w gramach, którą można rozpuścić w 100 gramach rozpuszczalnika w danej temperaturze. Wykres poniżej przedstawia tę zależność dla trzech substancji: siarczanu miedzi, chlorku sodu i azotanu potasu.

Korzystając z wykresu odpowiedz na poniższe pytania.

a) Której substancji można rozpuścić najwięcej w temperaturze 10°C?
b) W jakiej temperaturze siarczan miedzi i chlorek sodu mają taką samą rozpuszczalność w wodzie?
c) W jakiej temperaturze rozpuści się maksymalnie 60 g azotanu potasu w 100 g wody?
d) Z wykresu można odczytać, że w temperaturze 20°C rozpuszczalność siarczanu miedzi wynosi 20 g/100 g wody. Oblicz stężenie procentowe tego roztworu.



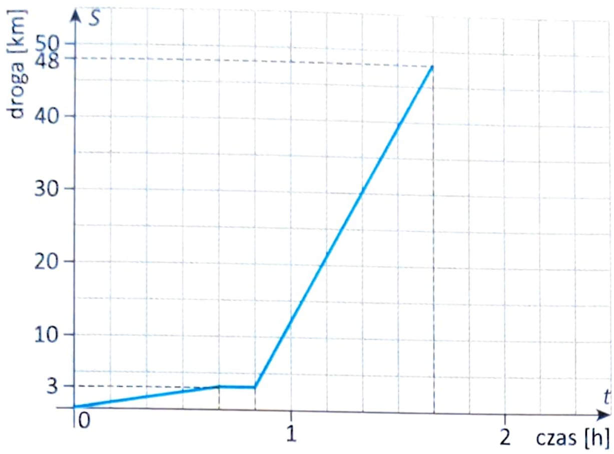
3.161. Poniższy wykres przedstawia przebieg temperatury w ciągu pewnej marcowej doby.



Przeanalizuj rysunek i odpowiedz na poniższe pytania.

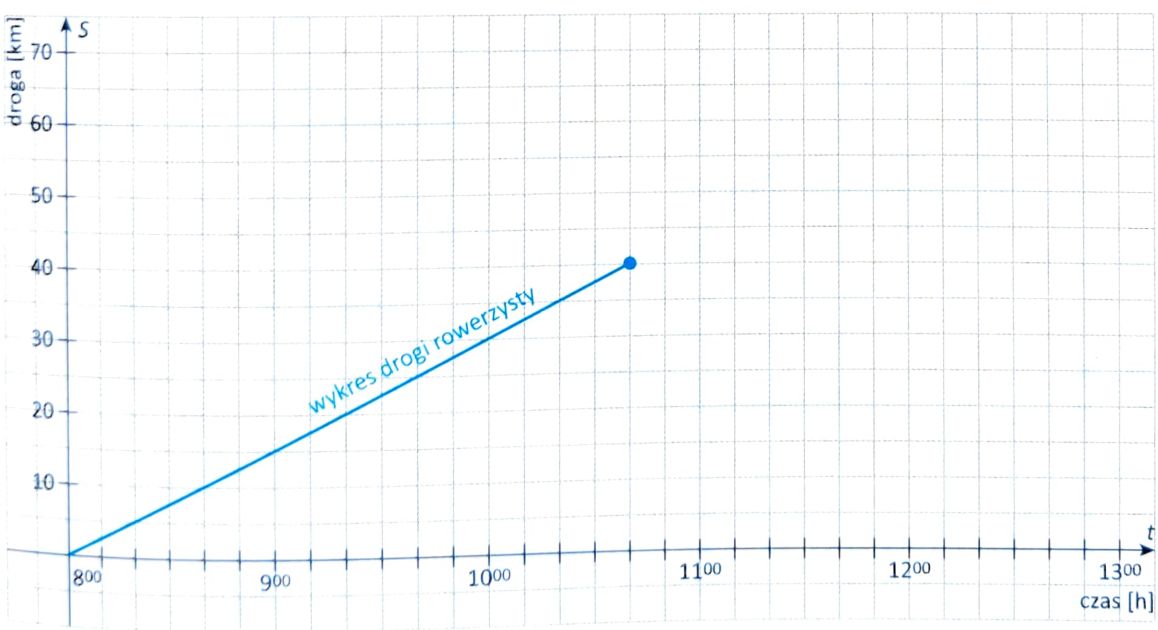
a) O której godzinie zanotowano najniższą temperaturę, i ile ona wynosiła?
b) Ile stopni wynosiła różnica pomiędzy najwyższą i najniższą temperaturą tej doby?
c) W jakich godzinach temperatura rosła?
d) W jakich godzinach temperatura wynosiła 4°C?

3.162. Od domu Ani do domu jej koleżanki Marty prowadzi droga w linii prostej. Ania wybrała się do Marty w odwiedziny. Najpierw szła pieszo do przystanku autobusowego, później czekała na autobus, a następnie wsiadła do autobusu, który dowiózł ją bezpośrednio do posesji koleżanki (przystanek autobusu znajduje się koło domu Marty). Wykres przedstawia przebytą przez Anię drogę w zależności od czasu.

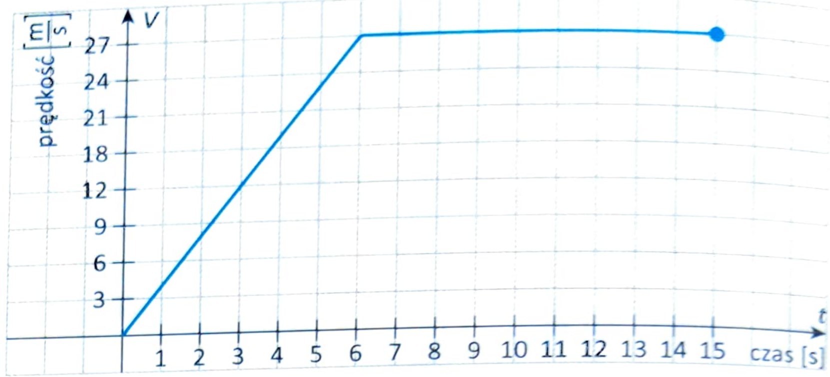


a) Z jaką prędkością szła Ania do przystanku autobusowego?
b) Ile minut czekała Ania na autobus?
c) Jaką drogę pokonała Ania autobusem?
d) Z jaką średnią prędkością jechał autobus?

3.163. Z tego samego miejsca wyruszyli w tę samą stronę rowerzysta i motocyklista. Obaj jechali tą samą trasą i w to samo miejsce – na spotkanie absolwentów do swojej szkoły. Rowerzysta wyruszył o godz. 8^{00}, a motocyklista wyjechał o godz. 9^{00} i jechał ze stałą prędkością 60 km/h.
a) O której godzinie motocyklista dogoni rowerzystę?
b) Po jakim czasie od przyjazdu do szkoły motocyklisty, na miejsce dotarł rowerzysta?



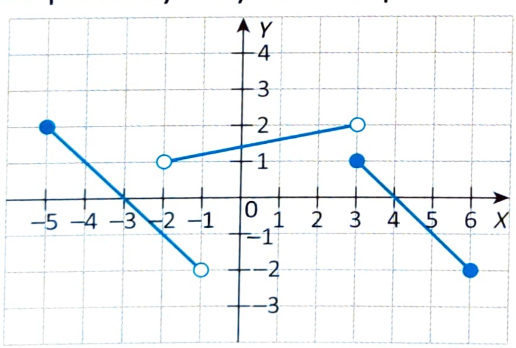
3.164. Poniższy wykres przedstawia zależność pomiędzy prędkością, z jaką porusza się ciało, a czasem.

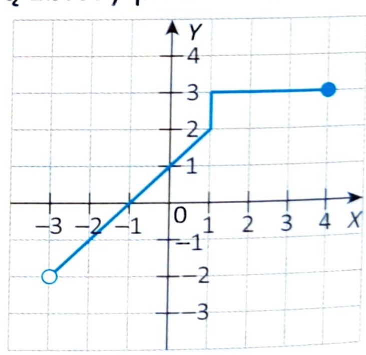


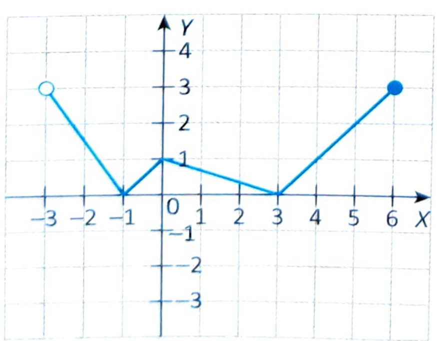
a) Jakim ruchem poruszało się ciało w ciągu pierwszych 6 sekund? Oblicz przyspieszenie, z jakim poruszało się to ciało.
b) Od 6 sekundy ciało poruszało się ruchem jednostajnym. Podaj prędkość tego ruchu.
c) Jaką drogę przebyło to ciało w ciągu pierwszych 12 sekund?
d) Oblicz średnią prędkość tego ciała w czasie pierwszych 12 sekund ruchu. Wyraź ją w km/h.

Test sprawdzający do rozdziału 3.

1. Na poniższych rysunkach przedstawione są zbiory punktów.

1)


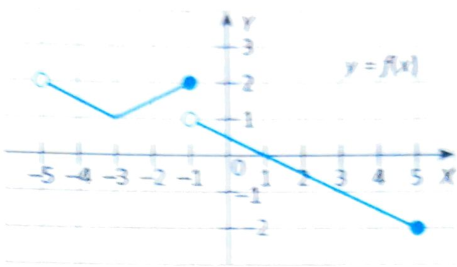
2)


3)


Wykres pewnej funkcji zmiennej x przedstawia rysunek:

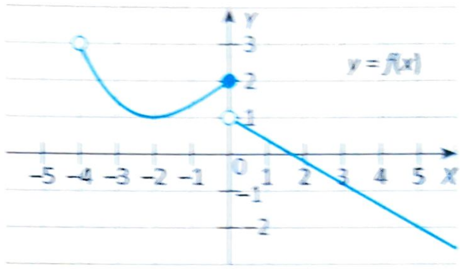
A. 1) i 3) B. tylko 3) C. 2) i 3) D. 1) i 2)

2. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Dziedziną funkcji f jest zbiór:



A. $\langle -5, 5)$ B. $\langle -2, 2)$
C. $(-2, 2\rangle$ D. $(-5, 5\rangle$

3. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$. Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór:



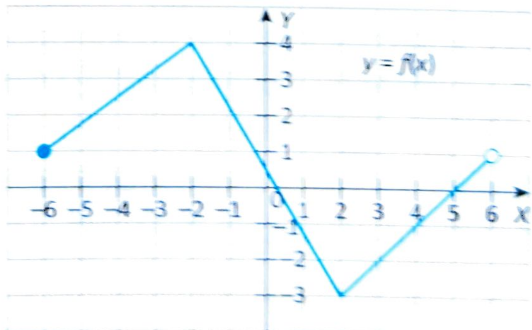
A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, 3)$
C. $(-4, +\infty)$ D. $(-\infty, 1) \cup (1, 3)$

4. Wykres funkcji $f(x) = 2x - 12$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przecina oś OY w punkcie:
A. $(0, -12)$ B. $(6, 0)$ C. $(0, 2)$ D. $(-6, 0)$

5. Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = 3x - 7$, gdzie $x \in \boldsymbol{Z}$. Do zbioru wartości funkcji g nie należy liczba:
A. -4 B. -1 C. 1 D. 44

6. Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych:
$\{(-10, 6), (-7, 4), (-1, 0), (0, -5), (1, -8), (3, -8), (5, -9)\}$. Wobec tego:
A. miejscem zerowym funkcji f jest punkt $(-1, 0)$;
B. funkcja f jest stała;
C. funkcja f jest monotoniczna;
D. funkcja f jest różnowartościowa.

7. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -6, 6)$. Funkcja f jest rosnąca:



A. w przedziale $\langle 1, 4\rangle$
B. w zbiorze $\langle -6, -2\rangle \cup \langle 2, 6)$
C. w przedziale $\langle -3, 1)$
D. w przedziałach: $\langle -6, -2\rangle$ oraz $\langle 2, 6)$.

8. Funkcja $f(x) = 10x - x^2$ przyjmuje wartość 25 dla argumentu:
A. 5 B. $-\sqrt{5}$ C. 15 D. -5

9. Liczby -2 oraz 2 są miejscami zerowymi funkcji f opisanej wzorem:
A. $f(x) = x^2 - 4x + 4$ B. $f(x) = x^2 + 4$
C. $f(x) = (2x + 4)(2x + 4)$ D. $f(x) = 4 - x^2$

10. Liczba miejsc zerowych funkcji $g(x)=\begin{cases} x, & \text{jeśli } x\in(-\infty,1\rangle \\ x-1, & \text{jeśli } x\in(1,+\infty) \end{cases}$ jest równa:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje połowę sześcianu tej liczby, pomniejszoną o 4. Funkcję f opisuje wzór:

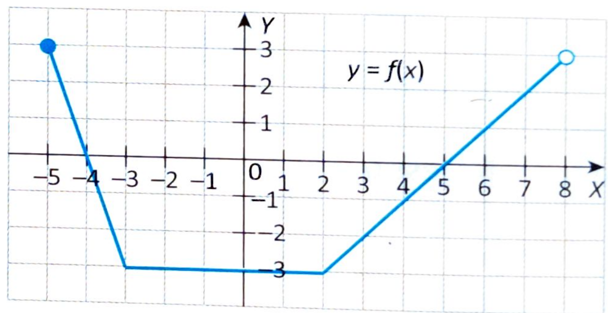
A. $f(x)=\frac{x^3-4}{2}$ B. $f(x)=0{,}5x^3-4$

C. $f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^3$ D. $f(x)=\frac{1}{2}x^6-4$

12. Funkcja $h(x)=\log_{0,2}(x+25)$, gdzie $x\in(-25,+\infty)$, dla argumentu 0 przyjmuje wartość:

A. -2 B. 25 C. $\frac{1}{5}$ D. 2

13. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -5, 8)$.



Wskaż zdanie fałszywe:

A. Suma najmniejszej i największej wartości funkcji f jest równa 0.

B. Funkcja f przyjmuje wartości nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x\in\langle -5,-4\rangle\cup\langle 5,8)$.

C. Wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt{26}$ jest ujemna.

D. $f(\sqrt{2}-1)=f(-1-\sqrt{2})$

14. Do wykresu funkcji $f(x)=\frac{4kx-5k-1}{x^2+1}$ należy punkt $P\left(-1, 8\frac{1}{2}\right)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $k=-4$ B. $k=-3$ C. $k=-2$ D. $k=-1$

15. Wartość funkcji $f(x)=-x^2+ax+2$ dla argumentu -2 jest większa od 6 wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $a>-4$ B. $a<-4$ C. $a<0$ D. $a>6$

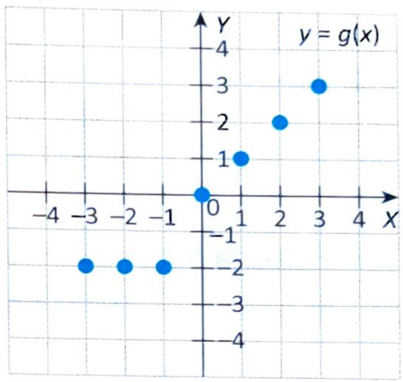
Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

16. Funkcję f opisuje poniższa tabelka:

x	-5	-4	-3	0	1	2
$f(x)$	2	-2	5	3	-2	0

a) Podaj miejsce zerowe funkcji f.
b) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.
c) Oblicz wartość wyrażenia $2 \cdot f(-3) + f(0)^{f(-5)}$
d) Czy funkcja f ma punkt wspólny z osią OY?

17. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji g.

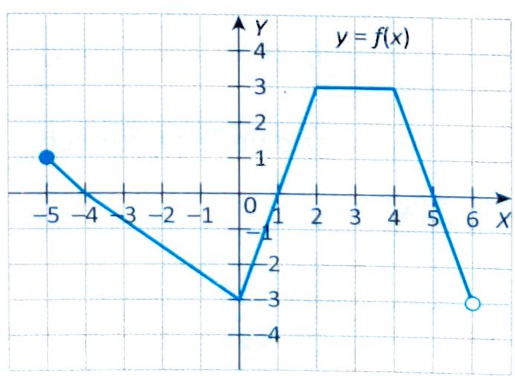


a) Oblicz wartość wyrażenia $g(3) - g(-3)$.
b) Napisz wzór funkcji g.
c) Wyznacz argumenty, dla których $-7 \cdot g(x) < 0$.
d) Czy funkcja g jest różnowartościowa?

18. Funkcję h opisuje wzór $h(x) = 3x - 4$, gdzie $x \in \boldsymbol{Z}$.
a) Wyznacz punkt wspólny wykresu funkcji h z osią OY.
b) Czy funkcja h ma miejsca zerowe? Odpowiedź uzasadnij.
c) Podaj najmniejszy argument, dla którego funkcja h przyjmuje wartość dodatnią.
d) Wyznacz liczbę całkowitą, spełniającą równanie $f(2x) = 3 - x$.

19. Funkcja f każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkowuje sumę cyfr tej liczby.
a) Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 3.
b) Jaką największą, a jaką najmniejszą wartość przyjmuje ta funkcja?
c) Czy funkcja f jest monotoniczna? Odpowiedź uzasadnij.
d) Czy funkcja f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

20. Omów własności funkcji, której wykres jest przedstawiony na rysunku obok.



21. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases}-6, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-3\rangle \\ \frac{(x-3)(x+5)}{2}, \text{ jeśli } x\in(-3,+\infty)\end{cases}$

D a) Wykaż, że $f\left(-\sqrt{10}\right)=f(1)$.

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

22. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ jeśli } x\in\langle -4,2) \\ -2, \text{ jeśli } x\in\langle 2,5\rangle\end{cases}$

Następnie podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

23. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\begin{cases}x^2, \text{ jeśli } x\in\langle -2,2\rangle \\ 4, \text{ jeśli } x\in(-5,-2)\cup(2,5)\end{cases}$. Następnie podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji g.

24. Funkcja h jest określona wzorem $h(x)=x^2+6x$, gdzie $x\in \mathbf{R}$.

a) Oblicz $h\left(\sqrt{2}-1\right)$.

b) Wyznacz argument, dla którego funkcja h przyjmuje wartość -9.

c) Oblicz miejsca zerowe funkcji h.

25. Funkcja f opisana jest wzorem $f(x)=(x+2)(x-4)$, gdzie $x\in \mathbf{R}$.

a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.

D b) Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $f(1-a)=f(1+a)$.

26. Funkcja f opisana jest wzorem: $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x-8, \text{ jeśli } x\in(-\infty,10) \\ 9-\frac{1}{4}x^2, \text{ jeśli } x\in\langle 10,+\infty)\end{cases}$

a) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $9\sqrt{2}$.

c) Sprawdź, czy punkt $A(9, 2)$ należy do wykresu funkcji f.

D d) Uzasadnij, że wykres funkcji f nie ma punktów wspólnych z osią OX.

27. Wyznacz dziedzinę funkcji f.

a) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-3}$

b) $f(x)=\frac{3x-7}{x^2+10}$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{2x+14}}{\sqrt{9-x}}$

d) $f(x)=\frac{2\sqrt{x+2}}{x^2-4x+4}$

28. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f, jeżeli istnieją.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{3+x}$

b) $f(x)=\dfrac{4x^2-100}{\sqrt{-x-2}}$

c) $f(x)=\dfrac{2x(x+6)(x-3)}{x^2-3x}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-2x+1}$

29. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\dfrac{2ax+3}{x+1}$, gdzie $x\neq-1$. Ponadto wiadomo, że $f(2)=3$.

a) Wyznacz a i ustal wzór funkcji f.

D b) Uzasadnij, że funkcja f nie ma miejsc zerowych.

c) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.

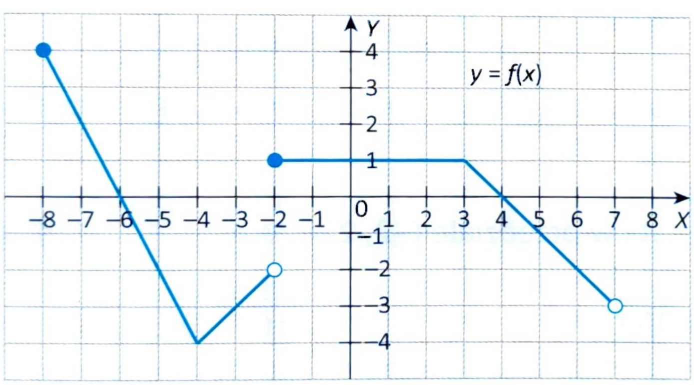
d) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

30. Wykresy funkcji $f(x) = 5x + 1$ oraz $g(x)=\dfrac{(2x-k)(3x+1)}{x^2-4}$ przecinają oś OY w tym samym punkcie.

a) Oblicz k.

b) Dla obliczonej w punkcie a) wartości k wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji g.

31 Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji f określonej w przedziale $\langle -8, 7)$.



a) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

b) Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których zachodzi nierówność $f(x)\geq-2$.

c) Dla argumentu -2 funkcja f przyjmuje taką samą wartość jak funkcja $g(x)=-x^2+2x-4m+5$. Wyznacz m.

d) Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności: $-2f(x)<0$.

32. Czy funkcje f i g są równe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-12}{(x-3)^2}$ oraz $g(x)=\dfrac{(x+2)(x-6)}{(3-x)^2}$

b) $f(x)=\dfrac{4-x}{x^2-8x+16}$ oraz $g(x)=\dfrac{1}{4-x}$

33. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{3x+10}{x+4}$.

a) Podaj dziedzinę funkcji f.

D b) Wykaż, że funkcja f jest różnowartościowa.

D 34. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & \text{jeśli } x\in\left(-\infty,0\right\rangle \\ \dfrac{-6}{x}+1, & \text{jeśli } x\in\left(0,+\infty\right) \end{cases}$.

Wykaż na podstawie definicji, że funkcja f:

a) jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$

b) jest rosnąca w przedziale $(0, +\infty)$.

35. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{-4x}{1+x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R}$.

a) Oblicz wartość wyrażenia $f(-1)^{f(1)}$.

D b) Wykaż, że funkcja f jest nieparzysta.

36. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{(3+x)(x-3)}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R}-\{0\}$.

a) Czy istnieje argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość 1? Odpowiedź uzasadnij.

D b) Wykaż, że funkcja f jest parzysta.

37. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- $D_f=(-8, 8)$
- $ZW_f=\langle -3, 6\rangle$
- funkcja f jest stała w przedziale $\langle -2, 2\rangle$
- $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\langle -6,-2)\cup(2,6\rangle$
- funkcja f jest parzysta.

38. Naszkicuj wykres funkcji f, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- $D_f=(-8, 0)\cup(0, 8)$
- $ZW_f=(-4, 4)$
- w przedziale $(-8, 0)$ funkcja f jest rosnąca
- jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 3
- funkcja f jest nieparzysta.

4. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

4.1. Sprawdź, czy podane w tabelkach wielkości x i y są wprost proporcjonalne? Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności i napisz wzór opisujący zależność zmiennej y od zmiennej x.

a)

x	-9	-6	-3	3
y	-3	-2	-1	1

b)

x	$0,2$	2	$0,1$	4
y	1	10	$0,5$	30

c)

x	1	$\sqrt{3}$	-4	$\sqrt{6}$
y	$2\sqrt{3}$	6	$-8\sqrt{3}$	$6\sqrt{2}$

d)

x	-6	$\frac{1}{3}$	$0,6$	$-2,5$
y	4	$-\frac{2}{9}$	$-0,4$	$1\frac{2}{3}$

4.2. O wielkościach x i y wiadomo, że są wprost proporcjonalne. Podaj współczynnik proporcjonalności. Uzupełnij tabelkę.

a)

x	$0,4\sqrt{2}$			$\sqrt{50}$
y	$\frac{4}{15}$	1	4	

b)

x	-10		2	$12\frac{1}{2}$	
y		$-2,4$	$1\frac{1}{5}$		36

4.3. Bochenek chleba kosztuje 2,10 zł.

a) Napisz wzór proporcjonalności prostej, określający koszt zakupów w zależności od liczby x zakupionych bochenków.

b) Na obóz harcerski zakupiono 28 bochenków chleba. Ile zapłacono?

c) Ile bochenków chleba można kupić za 1050 zł?

4.4. Rozważmy trójkąty, których podstawa ma długość 4 cm. Czy pole trójkąta jest wprost proporcjonalne do wysokości opuszczonej na tę podstawę? Jeśli tak, to napisz wzór tej proporcjonalności prostej.

4.5. Pompa w ciągu 8 godzin wypompowała 54 800 litrów wody.

a) Napisz wzór proporcjonalności prostej określający liczbę litrów wypompowanej wody w ciągu x godzin przez tę pompę.

b) Oblicz, ile litrów wody wypompuje ta pompa w ciągu 12,5 godziny.
c) Pompa wypompowała 89 050 litrów wody. Ile godzin pracowała?

4.6. Robotnik w ciągu 6 godzin wykonał 108 detali.
a) Zakładając, że wydajność robotnika nie ulegnie zmianie, napisz wzór proporcjonalności prostej, określający liczbę wykonanych detali w ciągu x godzin pracy.
b) Robotnik wykonał 156 detali. Jak długo pracował?
c) Pewnego dnia robotnik pracował tylko przez 3 godziny i 10 minut. Ile detali wykonał w tym czasie?

4.7. Samochód jedzie ze stałą prędkością 64 km/h.
a) Napisz wzór proporcjonalności prostej określający długość drogi s (w kilometrach), jaką przebył samochód jadąc z tą samą stałą prędkością w czasie t (w godzinach).
b) Ile kilometrów przejedzie ten samochód w ciągu 25 minut?
c) W jakim czasie, jadąc z tą samą prędkością, samochód przebędzie drogę 153,6 km?

4.8. Na trasie 60 km samochód pana Nowaka spala średnio 4,8 litra benzyny.
a) Napisz wzór proporcjonalności prostej określający zużycie paliwa (w litrach) w zależności od liczby x przejechanych kilometrów.
b) Ile kilometrów przejedzie samochód pana Nowaka, jeśli w baku jest 12,8 litra benzyny?
c) Ile litrów benzyny potrzebuje ten samochód na przejechanie 255 km?

4.9. Wiadomo, że z 90 kg suchych łodyg lnu można otrzymać 8 kg lnianego płótna.
a) Napisz wzór proporcjonalności prostej określający liczbę kilogramów otrzymanego płótna lnianego, w zależności od liczby x kilogramów suchych łodyg lnu wziętych do produkcji.
b) Ile kilogramów płótna otrzyma się z 8,1 kg suchych łodyg lnu?
c) Ile kilogramów suchych łodyg lnu potrzeba na wykonanie 6 kg lnianego płótna?

Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej

4.10. Wśród poniższych funkcji znajdują się funkcje liniowe. Wskaż je.

a) $y=2$
b) $y=\frac{-x}{\sqrt{2}}$
c) $y=\frac{2}{x}+5$
d) $y=\sqrt{x}-7$
e) $y=3x^2-1$
f) $y=1-\frac{x}{\sqrt{3}}$

4.11. Dla każdej z poniższych funkcji liniowych podaj współczynnik kierunkowy a oraz wyraz wolny b.

a) $y = x + 7$ b) $y = 1 - x$ c) $y = \sqrt{2}x$

d) $y = -4$ e) $y = \dfrac{3x - 4}{2}$ f) $y = \dfrac{8 - 5x}{4}$

4.12. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt A. Wyznacz wzór tej funkcji i naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych.

a) $(8, 2)$ b) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ c) $\left(\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right)$

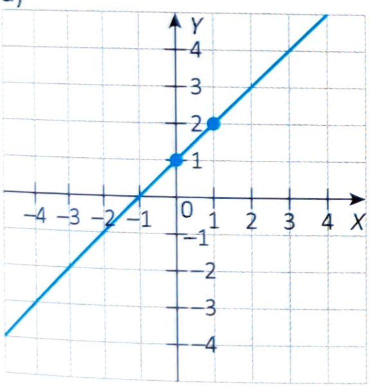
4.13. Dany jest wzór funkcji liniowej. Naszkicuj wykres tej funkcji. Skorzystaj z faktu, że do wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ należą punkty o współrzędnych: $(0, b)$ oraz $(1, a + b)$.

a) $f(x) = -2x + 3$ b) $f(x) = 4x + 2$ c) $f(x) = 3$

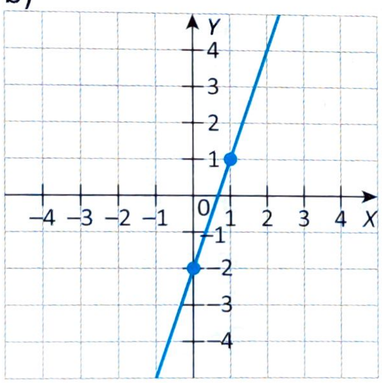
d) $f(x) = -4$ e) $f(x) = \dfrac{-10x + 6}{2}$ f) $f(x) = \dfrac{9x - 3}{3}$

4.14. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wykres funkcji liniowej $y = ax + b$. Wiedząc, że do wykresu funkcji należą punkty $(0, b)$ oraz $(1, a + b)$ napisz wzór tej funkcji.

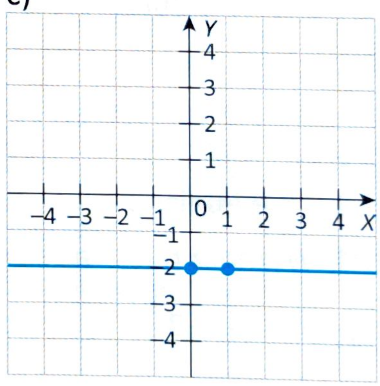
a)



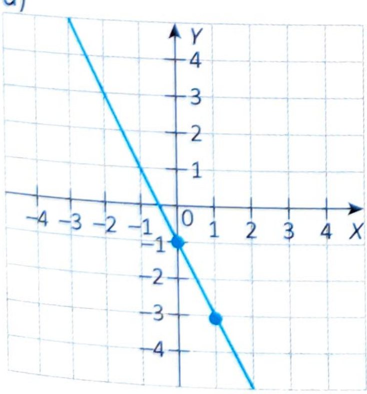
b)



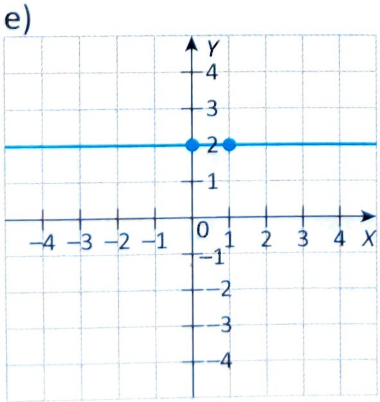
c)



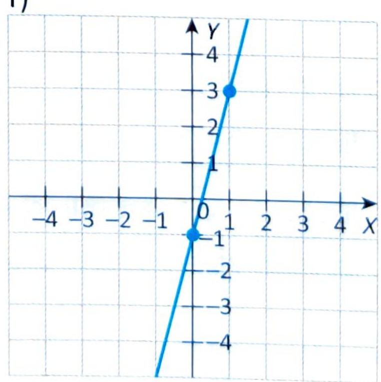
d)



e)



f)



4.15. Napisz wzór funkcji liniowej wiedząc, że do jej wykresu należą punkty A i B.

a) $A(0, -2)$, $B(5, 3)$
b) $A(0, 8)$, $B(-2, 2)$
c) $A(0, 54)$, $B(-18, 0)$
d) $A\left(18, -2\frac{1}{2}\right)$, $B\left(0, -\frac{1}{4}\right)$
e) $A\left(\sqrt{3}, 6\right)$, $B\left(0, 2\sqrt{3}\right)$
f) $A\left(1-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right)$, $B(0, 3)$.

4.16. Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresu danej funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych.

a) $y = 2x + 8$
b) $y = \sqrt{2}x - 2$
c) $y = -\pi x + \pi + 1$
d) $y = \sqrt{3} - 3$
e) $y = -\dfrac{x+2}{2} + 5$
f) $y = \dfrac{2-x}{3} - x$

4.17. Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresu danej funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $y = \dfrac{1}{2}x - 4$
b) $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$
c) $y = -1$
d) $y = \dfrac{3}{4}x + 3$
e) $y = \dfrac{x-5}{5}$
f) $y = \dfrac{8-4x}{4}$

4.18. Wyznacz miejsca zerowe funkcji liniowej f.

a) $f(x) = 2x - 10$
b) $f(x) = 0{,}5x + 1$
c) $f(x) = -\sqrt{2}x + \sqrt{6}$
d) $f(x) = \left(\sqrt{5} - 2\right)x - \sqrt{5}x$
e) $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 5\dfrac{1}{2}$
f) $f(x) = \dfrac{2-4x}{2} + 2x - 1$

4.19. Wyznacz miejsca zerowe danej funkcji liniowej.

a) $y = 0{,}2x - 0{,}3$
b) $y = -3x - 2\dfrac{2}{5}$
c) $y = 2\sqrt{2} - \sqrt{8}x$
d) $y = -3\pi x + \pi^2$
e) $y = \sqrt{2} - \sqrt{32}$
f) $y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x - \sqrt{3}$

D **4.20.** Wykaż, że:

a) liczba $\sqrt{2} - 1$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \left(\sqrt{2} + 1\right)x - 1$;

b) liczba $2 + \sqrt{3}$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = \left(2 + \sqrt{3}\right)x - \left(7 + 4\sqrt{3}\right)$.

4.21. Wyznacz wzór funkcji liniowej wiedząc, że do jej wykresu należy punkt P, a miejscem zerowym tej funkcji jest liczba x_0.

a) $P(0, -3),\ x_0 = 2$
b) $P\left(0, \sqrt{2}\right),\ x_0 = -\sqrt{8}$

4.22. Do wykresu funkcji liniowej f należy punkt A. Wyznacz liczbę m, a następnie oblicz wartość współczynnika kierunkowego we wzorze tej funkcji, jeśli:

a) $f(x) = (3 - 2m)x + 6 \quad A(-2, 8)$
b) $f(x) = 11 - (4m + 1)x \quad A(5, -14)$
c) $f(x) = (6 - 4m)x - 18 \quad A(6, -6)$
d) $f(x) = 100 - (25m + 4)x \quad A(-1, 4)$.

4.23. Do wykresu funkcji liniowej f należy punkt A. Wyznacz liczbę k, następnie oblicz wartość wyrazu wolnego we wzorze tej funkcji, jeśli:

a) $f(x) = \frac{3}{4}x - (3k + 5) \quad A(-8, 1)$
b) $f(x) = -3\frac{2}{5}x - (4 - 3k) \quad A(-5, -2)$
c) $f(x) = -(2k + 15) + 2{,}3x \quad A(10, 30)$
d) $f(x) = -(10k - 12) - 4{,}5x \quad A(-2, -9)$.

4.24. Wyznacz liczbę m, dla której miejscem zerowym funkcji liniowej f jest liczba podana obok wzoru tej funkcji, jeśli:

a) $f(x) = (m + 3)x - 4;\ \ 2$
b) $f(x) = (m^2 - 1)x - 3;\ \ 1$
c) $f(x) = x + 2m - 5;\ \ -1$
d) $f(x) = (4m - 2)x + m + 3;\ \ \frac{1}{2}$
e) $f(x) = 6mx;\ \ 7$
f) $f(x) = 2x + m^2 - 2;\ \ -5$.

4.25. Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = (3m - 2)x + m + 4$ należy punkt $A(-20, -74)$.

a) Oblicz m.
b) Dla wyznaczonej wartości m napisz wzór funkcji f i wyznacz miejsce zerowe.

4.26. Funkcja $f(x) = -5 - m(x - 3)$ przecina oś OX w punkcie o odciętej -2.

a) Oblicz m.
b) Dla wyznaczonej wartości m podaj wzór funkcji f i naszkicuj jej wykres w układzie współrzędnych.

4.27. Funkcja liniowa f opisana jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}m - 3\right)x + 6m - 1$. Wyznacz liczbę m, dla której:

a) funkcja f jest proporcjonalnością prostą
b) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 17)$
c) do wykresu funkcji f należy punkt $(-10, 28)$
d) miejscem zerowym funkcji f jest liczba 3.

Dla wyznaczonej wartości m podaj wzór funkcji f i sprawdź poprawność obliczeń.

D **4.28.** Wykaż, że jeśli funkcja liniowa jest nieparzysta, to jest proporcjonalnością prostą.

4.29. Wyznacz wzór nieparzystej funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $(-5, 135)$.

D **4.30.** Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to funkcja linowa $f(x) = ax + b$ jest różnowartościowa.

4.31. Zbadaj, czy istnieje liczba m, dla której funkcja liniowa f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

a) $f(x) = (m^2 - 9)x + 2m - 6$
b) $f(x) = (m^2 - 1)x + m^2 + 2m + 1$
c) $f(x) = (1 - 2m)x + 4m - 2$
d) $f(x) = (3 + 4m)x + m^2 - 4$

4.32. Zbadaj, czy istnieje liczba m, dla której funkcja liniowa f nie ma miejsc zerowych. Jeśli tak, naszkicuj jej wykres.

a) $f(x) = (1 - m)x + m$
b) $f(x) = (m^2 + 1)x + 2$
c) $f(x) = (3 - m^2)x + 2m$
d) $f(x) = (m^2 - 16)x - 4 + m$

4.33. Funkcja liniowa f opisana jest wzorem $f(x) = m(m + 2)x + m^2 - 4$. Wyznacz liczbę m, dla której:

a) funkcja f jest proporcjonalnością prostą
b) wykres funkcji f przecina oś OY w punkcie $(0, 21)$
c) funkcja f nie ma miejsc zerowych
d) funkcja f ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Dla wyznaczonej wartości m podaj wzór funkcji f i sprawdź poprawność obliczeń.

Znaczenie współczynnika kierunkowego występującego we wzorze funkcji liniowej

4.34. Dane są punkty A i B należące do wykresu funkcji liniowej. Oblicz współczynnik kierunkowy występujący we wzorze tej funkcji.

a) $A(-8, 9)$, $B(4, -6)$
b) $A(26, -10)$, $B(6, 14)$
c) $A(4, 7)$, $B(-6, -12)$
d) $A(36, 18)$, $B(-4, -2)$
e) $A(8, \sqrt{3})$, $B(9, \sqrt{3})$
f) $A\left(-5, 8\frac{3}{4}\right)$, $B\left(1, 9\frac{1}{4}\right)$

4.35. Do wykresu funkcji liniowej należą punkty K i L. Oblicz wartość współczynnika kierunkowego występującego we wzorze tej funkcji, a następnie wyznacz wzór tej funkcji.

a) $K\left(4, 2\frac{1}{2}\right)$, $L\left(-5, -4\frac{1}{4}\right)$
b) $K(7, -2)$, $L(-14, 4)$

c) $K\left(\sqrt{8}, -4\right)$, $L\left(-\sqrt{2}, -7\right)$

d) $K\left(\frac{3}{4}, \pi\right)$, $L\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$

e) $K\left(-\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}\right)$, $L\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$

f) $K\left(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $L\left(-6, -1\frac{1}{5}\right)$

4.36. Dany jest wzór funkcji liniowej. Naszkicuj wykres tej funkcji, korzystając z interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej.

a) $y = 2{,}5x - 3$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = \frac{3}{4}x$

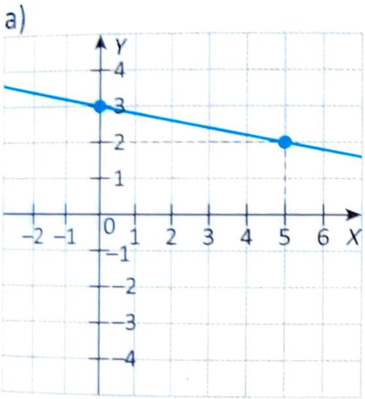
d) $y = -\frac{2}{3}x$

e) $y = \frac{1}{2}x + 3$

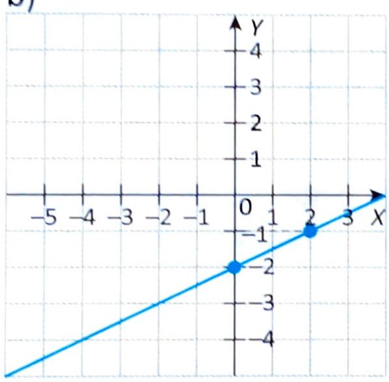
f) $y = -4x + 6$

4.37. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji liniowej. Podaj wzór tej funkcji, korzystając z interpretacji współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej.

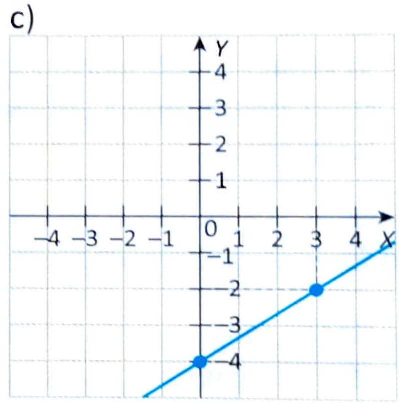
a)



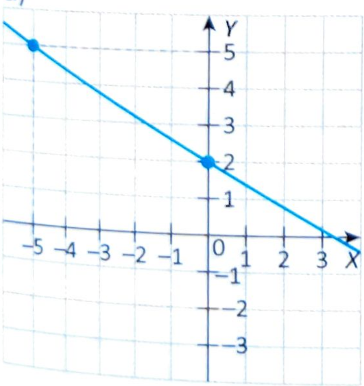
b)



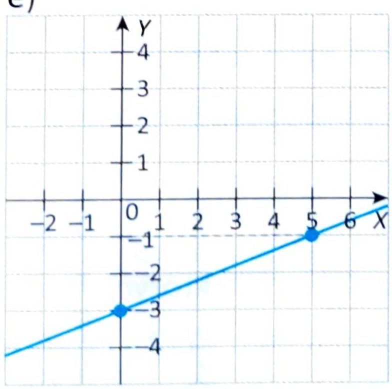
c)



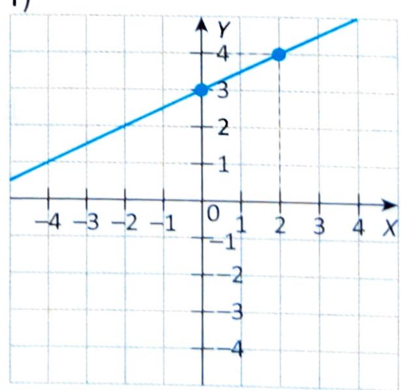
d)



e)



f)



4.38. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$.

a) Podaj współrzędne punktu, w którym wykres funkcji f przecina oś OY.

b) Oblicz miejsce zerowe tej funkcji.
c) Naszkicuj wykres funkcji f.
d) Wyznacz algebraicznie zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie i sprawdź poprawność obliczeń na podstawie narysowanego wykresu.

4.39. Funkcja liniowa jest określona wzorem $y = -2x - 8$.
a) Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Wyznacz algebraicznie zbiór wszystkich argumentów, dla których dana funkcja przyjmuje wartości większe od 2 i sprawdź poprawność obliczeń na podstawie narysowanego wykresu.

4.40. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{3} - 2$.
a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Sprawdź rachunkowo, czy punkt $P(-3, -3)$ należy do wykresu tej funkcji.
c) Wyznacz algebraicznie zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i sprawdź poprawność obliczeń na podstawie narysowanego wykresu.

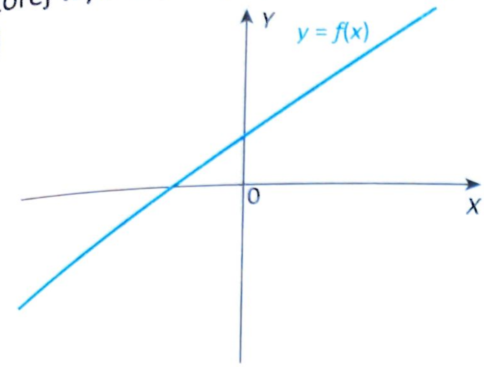
4.41. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = -\frac{2}{5}x + 1$.
a) Oblicz miejsce zerowe funkcji f.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze niż 5?

4.42. Określ, czy funkcja liniowa f jest rosnąca, malejąca czy stała.
a) $f(x) = 5x - 3$
b) $f(x) = -3x + 5$
c) $f(x) = 4 + \sqrt{3}$
d) $f(x) = \left(1 - \sqrt{3}\right)x$
e) $f(x) = 2x + 7 - \sqrt{5}x$
f) $f(x) = 3 + \left(3 - \sqrt{2}\right)x$

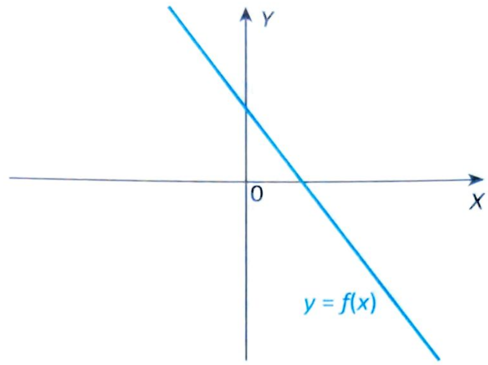
4.43. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa:
a) $y = (m + 1)x + 2$ jest rosnąca
b) $y = (2m + 3)x - m$ jest malejąca
c) $y = (2 - m)x + 3m$ jest stała
d) $y = 4mx - 2x + 5$ jest rosnąca
e) $y = 3x + 7 + mx$ jest malejąca
f) $y = 1 + m$ jest stała.

4.44. Określ znaki współczynników a, b we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, której wykres jest przedstawiony poniżej.

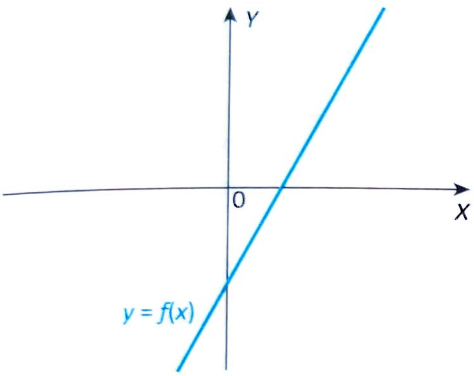
a)



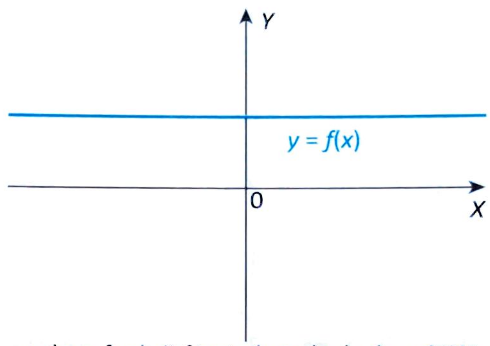
b)



c)



d)



wykres funkcji f jest równoległy do osi OX

4.45. Dany jest punkt A należący do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$. Wyznacz a i b. Następnie określ, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji f.

a) $f(x) = 3(m - 1) + 4mx$ $A(-5, 31)$ b) $f(x) = -0{,}25(m + 1)x - 8m + 4$ $A(100, 78)$

c) $f(x) = (9 - 4m)x + m^2 + 3$ $A(1, 8)$ d) $f(x) = 2m - (m + 1)x$ $A(1, -2)$

4.46. Wyznacz liczbę a, dla której wykres funkcji liniowej $y = \left(\frac{1}{3}a - 1\right)x + a^2 - 9$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

4.47. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których wykres funkcji liniowej $y = -2ax + a + 6$ przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.

4.48. Wyznacz wszystkie wartości k, dla których wykres funkcji liniowej $y = (k - 1)x - 2k - 4$ przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

4.49. Wykres funkcji liniowej $y = (4k^2 - 12k + 9)x - 6$ przechodzi tylko przez III i IV ćwiartkę układu współrzędnych. Oblicz k.

4.50. Dane są wzory dwóch funkcji liniowych f oraz g. Nie szkicując wykresów tych funkcji ustal, czy wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji g.

a) $f(x) = 3x - 7,\ g(x) = 3$

b) $f(x) = -0{,}25x + 4,\ g(x) = 4$

c) $f(x) = -21x + 5,\ g(x) = -21x$

d) $f(x) = \frac{9 - x}{3},\ g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

e) $f(x) = \frac{-8 - 4x}{2},\ g(x) = -4x + 1$

f) $f(x) = 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}x,\ g(x) = 4\sqrt{3}x - 8$

4.51. Dany jest wzór funkcji liniowej f oraz współrzędne punktu P. Wyznacz wzór funkcji liniowej g wiedząc, że jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P.

a) $f(x) = -8x,\ P(12, 0)$

b) $f(x) = \left(\sqrt{5} + 2\right)x + 4,\ P(0, -10)$

c) $f(x) = 6 - 4x,\ P\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

d) $f(x) = \frac{5 - 2x}{8},\ P(-8, 13)$

e) $f(x) = 5,\ P(3, \pi)$

f) $f(x) = \frac{9x - 6}{3},\ P\left(\sqrt{3}, \sqrt{27}\right)$

4.52. Wykres funkcji liniowej f jest równoległy do wykresu funkcji liniowej g. Oblicz m, jeśli:

a) $f(x) = -5x + m + 2 \qquad g(x) = 1 - (m + 2)x$
b) $f(x) = 0{,}5x + 4 - 3m \qquad g(x) = (9m - 8{,}5)x - 4m$
c) $f(x) = 6 - (m^2 + 2m)x \qquad g(x) = x + 3m + 7$
d) $f(x) = (m^2 + 1)x + m - 2 \qquad g(x) = (2m^2 - 3)x - 2m - 1.$

Dla wyznaczonej wartości m naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

D **4.53.** Do wykresu funkcji liniowej f należą punkty $A(-3, 0)$ i $B(0, 3)$, zaś wykres funkcji g przechodzi przez punkty $C(0, -2)$ i $D(2, 0)$. Wykaż, że wykresy funkcji f i g są równoległe.

4.54. Wykres funkcji liniowej $f(x) = -4x - 8$ przecina oś OX w punkcie A i oś OY w punkcie B. Wykres funkcji liniowej $g(x) = -x + 4$ przecina oś OX w punkcie C i oś OY w punkcie D. Czy prosta przechodząca przez punkty A i D jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty B i C? Odpowiedź uzasadnij.

D **4.55.** Dane są punkty: $A(-6, 0)$, $B(-4, -2)$, $C(0, 0)$, $D(2, 4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

D **4.56.** Dane są punkty: $A(-2, 4)$, $B(-4, 1)$, $C(2, -5)$, $D(4, -2)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

D **4.57.** Dana jest funkcja liniowa $f(x) = ax + b$. Wykaż na podstawie definicji, że:
a) jeśli $a > 0$, to funkcja f jest rosnąca
b) jeśli $a < 0$, to funkcja f jest malejąca
c) jeśli $a = 0$, to funkcja f jest stała.

D **4.58.** Wykaż, że jeśli funkcja liniowa jest parzysta, to jest stała.

Własności funkcji liniowej – zadania różne

4.59. Wykres funkcji liniowej f przecina oś OY w punkcie $(0, 9)$. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 15)$. Wyznacz wzór funkcji f.

4.60. Wykres funkcji liniowej g przecina oś OY w punkcie $(0, -21)$. Funkcja g przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, 24)$. Wyznacz wzór funkcji g.

4.61. Funkcja liniowa h przyjmuje wartości dodatnie dla każdego argumentu, a jej wykres przechodzi przez punkt $(123, 71)$. Wyznacz wzór funkcji h.

4.62. Funkcja liniowa f jest opisana wzorem $f(x) = -2x + 3\sqrt{3}$.
a) Wyznacz argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $\left\langle -3\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \right\rangle$.
D b) Wykaż, że liczba $f\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\right)$ jest wymierna.

4.63. Naszkicuj wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu miejsca zerowe tej funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 1) \\ x-4, & \text{jeśli } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 4) \\ 2, & \text{jeśli } x \in \langle 4, +\infty) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x-3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ -3, & \text{jeśli } x \in \langle 0, 4) \\ \frac{3}{4}x-6, & \text{jeśli } x \in \langle 4, +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x+2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -3) \\ -x, & \text{jeśli } x \in \langle -3, 2\rangle \\ 2x-6, & \text{jeśli } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

4.64. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \\ 7x+6, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{jeśli } x \in (-3, 0\rangle \\ 5x-15, & \text{jeśli } x \in (0, 6) \end{cases}$

4.65. Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases} -\frac{5}{3}x-10, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-3) \\ 2x+1, & \text{jeśli } x\in\langle -3,+\infty) \end{cases}$

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu -9.
b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
c) Podaj współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY.
d) Naszkicuj wykres funkcji f.

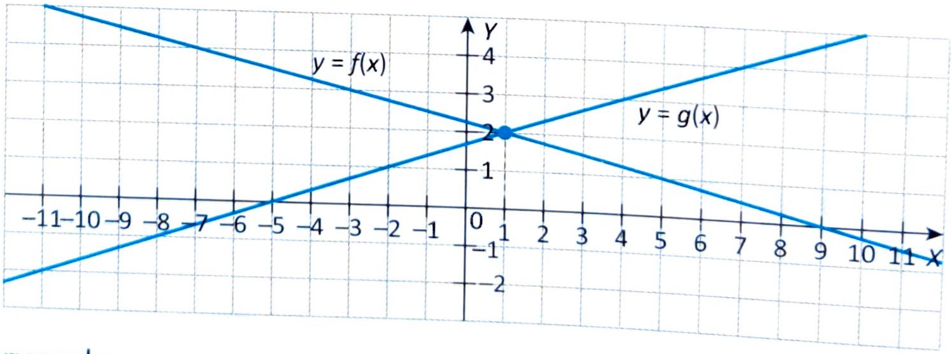
4.66. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji f i na jego podstawie omów jej własności.

a) $f(x)=\begin{cases} -3, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-1) \\ 3x, & \text{jeśli } x\in\langle -1,1\rangle \\ 3, & \text{jeśli } x\in(1,+\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & \text{jeśli } x\in\langle -3,0) \\ -2x+4, & \text{jeśli } x\in\langle 0,3\rangle \\ -2, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \end{cases}$

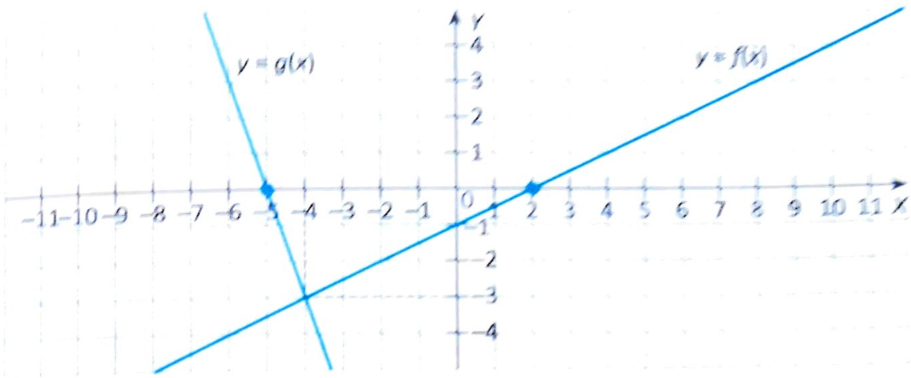
4.67. Funkcje liniowe $f(x)=-0{,}75x+6$ oraz $g(x)=(2a+3)x+4(a-1)$ mają wspólne miejsce zerowe.
a) Oblicz a.
b) Dla wyznaczonej wartości a podaj wzór funkcji g.

4.68. Na poniższym rysunku przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych f i g.



Odczytaj z rysunku:
a) Dla jakiego argumentu obie funkcje przyjmują tę samą wartość? Ile ta wartość wynosi?
b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe, niż funkcja g?
c) Dla jakich argumentów obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie?
d) Dla jakich argumentów spełnione są jednocześnie dwie nierówności: $f(x)\geq 0$ i $g(x)<3$?

4.69. Na rysunku poniżej, we wspólnym układzie współrzędnych przedstawione są wykresy dwóch funkcji liniowych f i g.



Na podstawie rysunku:

a) Podaj zbiór argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości ujemne.
b) Odczytaj zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są nie większe od wartości funkcji g.
c) Podaj, która z tych funkcji jest rosnąca, a która malejąca.
d) Wyznacz wzory funkcji f i g.

4.70. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = 2x + 6$ oraz $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

a) Oblicz, dla jakiego argumentu obie funkcje przyjmują tę samą wartość. Ile ta wartość wynosi?
b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości dodatnie.
c) Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych i sprawdź na rysunku poprawność swoich obliczeń.

4.71. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = -2x + 5$ oraz $g(x) = x - 4$.

a) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wykresów obu funkcji.
b) Oblicz, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja g.
c) Oblicz, dla jakich argumentów obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości ujemne.
d) Naszkicuj wykresy obu funkcji we wspólnym układzie współrzędnych i sprawdź na rysunku poprawność swoich obliczeń.

4.72. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = -3x + 4$ oraz $g(x) = -x - 2$.

a) Oblicz, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja g.
b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których obie funkcje przyjmują wartości różnych znaków.
c) Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy obu funkcji i sprawdź poprawność swoich obliczeń.

4.73. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ oraz $g(x)=-0{,}5x+1$.

a) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów tych funkcji.
b) Porównaj liczby $f(-4)$ i $g(-4)$.
c) Wyznacz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości nieujemne.

4.74. Dane są funkcje liniowe: $f(x)=3x+12$ oraz $g(x)=-2x-4$.
a) Oblicz iloczyn miejsc zerowych tych funkcji.
b) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresów tych funkcji.
c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od 3 i jednocześnie wartości funkcji g są większe od -2?

4.75. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=-3x+6$.
a) Napisz wzór funkcji liniowej g, której wykres jest równoległy do osi OX i przecina oś OY w tym samym punkcie, co wykres funkcji f.
b) Wyznacz wzór funkcji liniowej h, której miejscem zerowym jest liczba -3, a jej wykres jest równoległy do wykresu funkcji f.
c) Naszkicuj w układzie współrzędnych czworokąt, ograniczony wykresami funkcji f, g, h i osią OX. Jaki to czworokąt?

4.76. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=\frac{x}{2}-3$.
a) Wyznacz wzór funkcji g, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $P(1, 2)$.
b) Naszkicuj wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.
c) Oblicz, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne i jednocześnie funkcja g przyjmuje wartości dodatnie.

4.77. Wykresy funkcji liniowych: $f(x)=6$, $g(x)=-2x+8$ oraz $h(x)=(m-1)x+3$ przecinają się w jednym punkcie.
a) Podaj współrzędne tego punktu.
b) Oblicz m.
c) Porównaj liczby: $f(2)$, $g(2)$ i $h(2)$.

4.78. Naszkicuj wykres funkcji liniowej $f(x)=-2x+9$. Na podstawie wykresu wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych, które są współrzędnymi punktów należących do wykresu tej funkcji.

4.79. Wyznacz wszystkie liczby naturalne x, dla których wartości funkcji liniowej $f(x)=7-\frac{x}{2}$ też są liczbami naturalnymi.

4.80. Funkcja liniowa f jest opisana wzorem $f(x) = -3x + 7$.

a) Na podstawie wykresu tej funkcji podaj, jaki zbiór wartości odpowiada argumentom należącym do przedziału $\langle 0, 2\rangle$.

b) Wyznacz wartość k, dla której $f(-k) = k$.

4.81. Dany jest wzór funkcji liniowej $f(x) = 4x - 3b + 9$, gdzie b jest parametrem.

a) Dla $b = -2$ oblicz wartość funkcji dla argumentu -1.

b) Wyznacz wszystkie wartości b, dla których wykres funkcji f przecina oś OY powyżej punktu $P(0, 6)$.

4.82. Dany jest wzór funkcji liniowej $g(x) = 5x + \frac{b-2}{4}$, gdzie b jest parametrem.

a) Dla $b = -2$ oblicz argument, dla którego funkcja g przyjmuje wartość 9.

b) Wyznacz wszystkie wartości b, dla których wartość funkcji g dla argumentu $\frac{1}{5}$ jest mniejsza od 3.

4.83. Funkcję liniową h określa wzór $h(x) = -\frac{1}{8}x - \frac{2k+1}{4}$, gdzie k jest parametrem.

a) Dla $k = 3$ oblicz miejsce zerowe funkcji h.

b) Wyznacz wszystkie wartości k, dla których miejsce zerowe funkcji h jest liczbą większą od 102.

4.84. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x) = -5mx + \frac{4m}{3} - 1$ jest malejąca i jednocześnie wykres tej funkcji przecina oś OY poniżej punktu $P(0, 3)$.

4.85. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (m - 2)x - 3 + m$ jest rosnąca i jednocześnie wykres tej funkcji przecina oś OY poniżej punktu $P(0, 7)$.

4.86. Funkcja liniowa f jest opisana wzorem $f(x) = 16x + 32$.

a) Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości należące do przedziału $(-48, 124)$.

b) Rozwiąż nierówność $f(a - 3) - 2f(a + 2) < 0$.

4.87. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = -5x + 25$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu równego $3^{-1} \cdot \sqrt{27} \cdot 3^{0,5}$.

b) Wyznacz liczby naturalne, które spełniają nierówność $f(2k) \geq 1 - k$.

4.88. Ile różnych punktów należy do wykresu funkcji liniowej $f(x) = -x - 4$, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi ujemnymi?

4.89. Ile różnych punktów należy do wykresu funkcji liniowej $f(x) = 3x + 20$, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi różnych znaków?

4.90. Wyznacz wszystkie wartości k, dla których funkcja liniowa określona wzorem:

a) $f(x) = (k-1)(k+2)x - 9$ ma jedno miejsce zerowe

b) $f(x) = 15 - (k^2 + 18k + 81)x$ nie ma miejsc zerowych

c) $f(x) = (2k^2 - 8)x + k + 2$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

4.91. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = (m-4)x + 3m + 5$ i $g(x) = 9 - m + (6-m)x$. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których:

a) funkcja f jest rosnąca i jednocześnie funkcja g jest malejąca

b) wykresy funkcji f i g są równoległe

c) obie funkcje przyjmują tę samą wartość dla argumentu (-12)

d) wykresy funkcji f i g przecinają oś OY w tym samym punkcie.

Czy istnieje taka wartość m, dla której liczba 2 jest wspólnym miejscem zerowym funkcji f i g? Odpowiedź uzasadnij.

4.92. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x) = 2x - \frac{3k+1}{5}$ oraz $g(x) = (k^2 - 623)x + 2k - 9$. Wyznacz wartość k tak, aby miejsce zerowe funkcji f było liczbą z przedziału $(-\infty, 4)$ i jednocześnie wykresy funkcji f i g były równoległe.

Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych

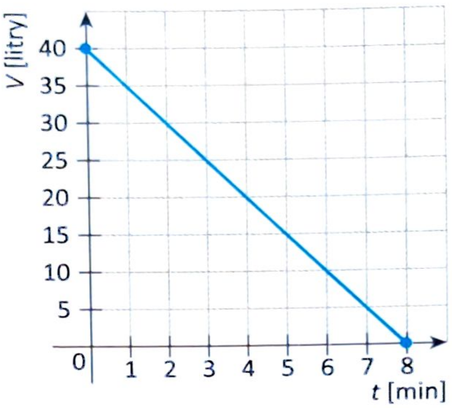
4.93. Do hurtowni dostarczono 14 ton jabłek. Codziennie, licząc od następnego dnia, wydawano z jej magazynu 200 kg jabłek, aż do wyczerpania zapasów. Napisz wzór funkcji, określający zależność między liczbą kilogramów jabłek pozostałych w magazynie a liczbą dni, które minęły od dnia dostarczenia jabłek do hurtowni, do dnia, kiedy magazyn był pusty.

4.94. Pierwszego stycznia 2018 r. Janek dostał od babci 120 zł i postanowił od tego czasu oszczędzać. Do kwoty otrzymanej od babci będzie dokładał co miesiąc, przez 2 lata, 80% miesięcznego kieszonkowego, które otrzymuje od rodziców w wysokości 70 zł.

a) Napisz wzór funkcji określający stan oszczędności Janka w zależności od liczby miesięcy oszczędzania.
b) Po ilu miesiącach oszczędzania jego stan posiadania będzie 8-krotnie większy od kwoty, jaką otrzymał od babci?

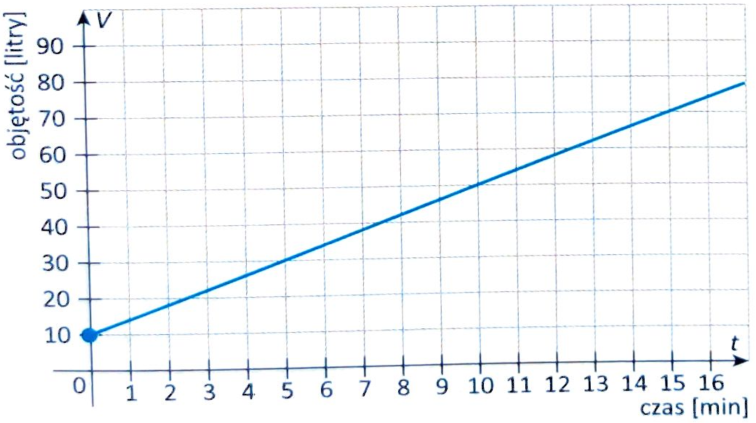
4.95. Kolarz przejechał drogę mającą długość 180 km ze stałą prędkością 45 km/h. Napisz wzór funkcji określający odległość kolarza od mety (km) w zależności od czasu jazdy (h). Naszkicuj wykres tej funkcji.

4.96. Na rysunku obok jest przedstawiony wykres ilustrujący proces wyciekania wody z pojemnika.
a) Ile litrów wody było początkowo w pojemniku?
b) Ile litrów wody znajdowało się w pojemniku po 4 minutach?
c) Po jakim czasie w pojemniku było 10 litrów wody?
d) Napisz wzór funkcji, określający zależność liczby litrów wody w pojemniku od czasu wyciekania wody.



4.97. W zbiorniku znajdowało się 240 litrów wody. Po odkręceniu kurka odpływowego woda wypływała ze zbiornika ze stałą prędkością 20 litrów na minutę.
a) Ile trwało całkowite opróżnienie zbiornika?
b) Napisz wzór funkcji V, określający zależność liczby litrów wody w zbiorniku od czasu, jaki upłynął od odkręcenia kurka odpływowego.
c) Naszkicuj wykres funkcji V.

4.98. W zbiorniku o pojemności 260 litrów znajdowało się 10 litrów wody. Na rysunku poniżej jest przedstawiony fragment wykresu ilustrującego proces napełniania wodą tego zbiornika po odkręceniu kranu napływowego.



a) Odczytaj z wykresu, ile wody było w zbiorniku po 10 minutach od momentu odkręcenia kranu napływowego.
b) Po ilu minutach od momentu odkręcenia kranu w zbiorniku znajdowało się 70 litrów wody?
c) Napisz wzór funkcji, określający zależność liczby litrów wody w pojemniku od czasu, jaki upłynął po odkręceniu kranu napływowego, do chwili napełnienia zbiornika wodą.

4.99. W wannie o pojemności 200 litrów znajdowało się 20 litrów wody. Po odkręceniu kurków do wanny napływa 15 litrów wody w ciągu minuty. Napisz wzór funkcji, określający zależność liczby litrów wody w wannie od czasu, jaki upłynął od odkręcenia kranów do momentu ich zakręcenia, kiedy wanna była pełna. Naszkicuj wykres tej funkcji.

4.100. Turysta wyruszył ze schroniska o godzinie $7^{\underline{00}}$, kierując się prosto pod górę. W ciągu pierwszej godziny przeszedł 3 km, a w ciągu następnej przeszedł 5 km, ponieważ droga biegła grzbietami gór. Następnie odpoczywał przez 40 minut, podziwiając piękny krajobraz. Pozostałą część trasy szedł z prędkością 3 km/h i przybył do celu o godzinie $11^{\underline{00}}$.
a) Naszkicuj wykres funkcji, opisującej drogę turysty w zależności od czasu.
b) Ile kilometrów przeszedł turysta?

4.101. Obwód prostokąta o bokach długości x i y jest równy 14.
a) Wyznacz wzór funkcji określającej długość boku y w zależności od x.
b) Podaj dziedzinę wyznaczonej funkcji.
c) Dla jakiej wartości x funkcja przyjmuje wartość równą 4?
d) Naszkicuj wykres tej funkcji.

4.102. Obwód trójkąta równoramiennego o bokach długości x, x, y jest równy 8.
a) Wyznacz wzór funkcji określającej długość boku y w zależności od x.
b) Podaj dziedzinę tej funkcji.
c) Wyznacz argument x, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość równą 1.
d) Naszkicuj wykres tej funkcji.

4.103. Magda i Ola podjęły pracę wakacyjną w dwóch różnych pizzeriach. Magda otrzymuje stałą dzienną stawkę w wysokości 52 zł, a także 1,60 zł za każdą dostarczoną klientowi pizzę. Ola podpisała umowę, która gwarantuje jej stałą stawkę dzienną w wysokości 40 zł oraz 2,20 zł za każdą dostarczoną pizzę.
a) Która z dziewcząt wybrała korzystniejsze warunki pracy przy założeniu, że dzienna średnia liczba dostaw wynosi 15?
b) Przy jakiej liczbie dostaw dzienny zarobek obu dziewcząt będzie identyczny?

4.104. W pewnym kraju od podatku dochodowego zwolnione są dochody nieprzekraczające 800 dolarów. Za dochody przekraczające 800 dolarów, ale nie większe niż 2000 dolarów, podatnik płaci podatek w wysokości 5% od dochodu pomniejszonego o 800 dolarów. Jeśli dochód przekracza 2000 dolarów, podatnik płaci 60 dolarów plus 20% nadwyżki powyżej 2000 dolarów.

a) Napisz wzór funkcji, która opisuje wysokość podatku w tym kraju w zależności od dochodu podatnika.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Oblicz, jaki podatek zapłaci podatnik o dochodach równych 1800 dolarów, a jaki – o dochodach 5800 dolarów.

4.105. Korporacja taksówkowa MULTI – TAXI proponuje klientowi następujące zasady usługi: za pierwszy kilometr jazdy 3 zł 60 gr, oraz za każdy następny (rozpoczęty) kwotę 1 zł 60 gr. Konkurencyjna korporacja TRANS – TAXI proponuje następujące zasady usługi: 4 zł za pierwszy kilometr jazdy, a za każdy następny (rozpoczęty) kwotę 1 zł 40 gr. W obu korporacjach umowa dotyczy tras nie dłuższych niż 40 km.

a) Dla każdej z powyższych korporacji zapisz wzór funkcji określającej wysokość opłaty k za przejazd taksówką, w zależności od liczby n naliczonych przez taksometr kilometrów jazdy.
b) Przy jakiej liczbie kilometrów obie korporacje zażądają takiej samej zapłaty?
c) W przypadku której korporacji klient zapłaci mniej za przejazd trasą długości 16 km?

4.106. Pewna firma telefoniczna proponuje abonentowi do wyboru dwa warianty opłat miesięcznych za telefon:

I – za każdy impuls 12 groszy i jednocześnie opłatę stałą w wysokości 28 zł
II – za każdy impuls 47 groszy i jednocześnie brak opłaty stałej.

a) Dla każdego wariantu zapisz wzór funkcji opisującej zależność między miesięczną opłatą za telefon a liczbą wykorzystanych w miesiącu impulsów, przy założeniu, że miesięczna liczba wykorzystanych impulsów jest nie większa niż tysiąc.
b) Który z wariantów korzystniej jest wybrać, jeśli zakładamy, że miesięcznie wykorzystuje się 200 impulsów?
c) Oblicz, przy jakiej liczbie impulsów wybór pomiędzy podanymi wariantami opłat nie wpływa na wysokość opłat.

Wykresy wybranych funkcji

4.107. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(3x+9)$ b) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)$ c) $f(x) = -\operatorname{sgn}(x-1)$.

4.108. Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, napisz wzór funkcji f bez znaku wartości bezwzględnej. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji.

a) $f(x) = |x| - 2$

b) $f(x) = -|3x|$

c) $f(x) = |x + 3|$

d) $f(x) = -|x + 1| + 5$

e) $f(x) = |3 - x| + x$

f) $f(x) = |x + 4| - x$

4.109. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \frac{-2 \cdot |x|}{x}$

b) $f(x) = \frac{4}{\text{sgn}(x+2)}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x}$

4.110. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = \max(-x + 1, 2x + 7)$

b) $f(x) = \max\left(\frac{2}{3}x, -\frac{1}{2}x\right)$

c) $f(x) = \min\left(2 - x, \frac{1}{3}x - 2\right)$

d) $f(x) = \max(5x + 3, -2)$

e) $f(x) = \min\left(1, -\frac{x}{3}\right)$

f) $f(x) = \min(x + 4, -2x + 1)$.

4.111. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = [x]$, gdzie $x \in \langle 0, 4)$

b) $f(x) = -2[x]$, gdzie $x \in \langle -1, 3\rangle$

c) $f(x) = [x + 2]$, gdzie $x \in \langle -6, 1)$

d) $f(x) = -[x] + 3$, gdzie $x \in \langle -2, 5\rangle$.

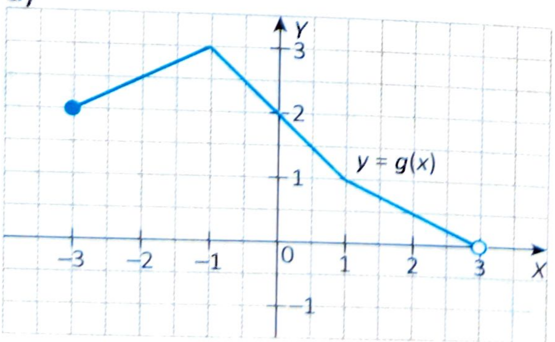
4.112. Naszkicuj wykres funkcji f, jeśli:

a) $f(x) = x - [x]$, gdzie $x \in \langle 0, 8\rangle$

b) $f(x) = [x] - x$, gdzie $x \in \langle -3, 3)$.

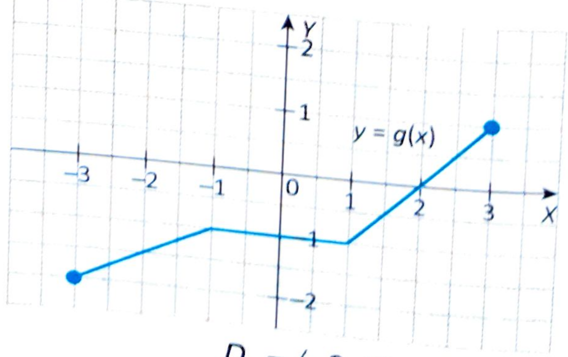
4.113. Na poniższym rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y = g(x)$. Naszkicuj wykres funkcji f, gdzie $f(x) = [g(x)]$.

a)



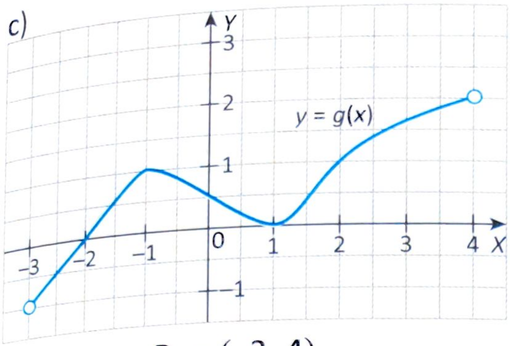
$D_g = \langle -3, 3)$

b)



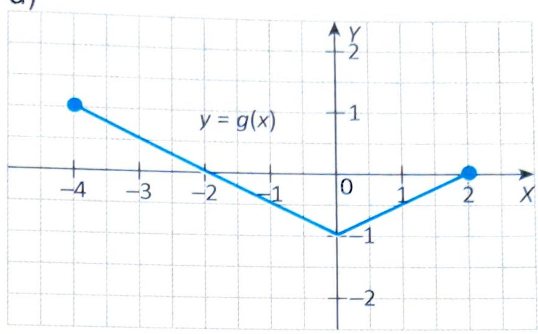
$D_g = \langle -3, 3\rangle$

c)



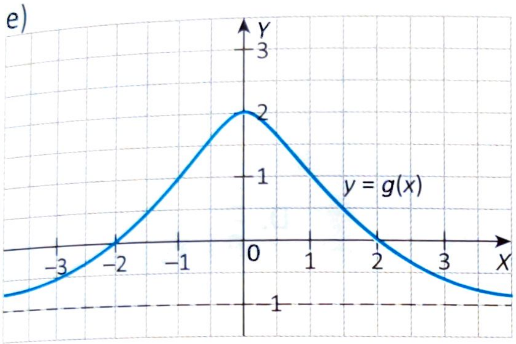
$D_g = (-3, 4)$

d)



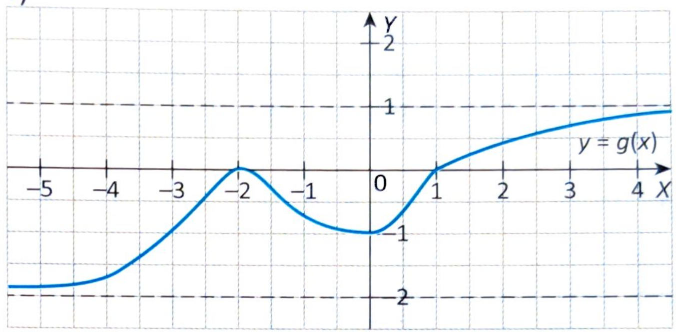
$D_g = \langle -4, 2 \rangle$

e)



$D_g = \boldsymbol{R}$

f)



$D_g = \boldsymbol{R}$

Test sprawdzający do rozdziału 4.

1. Wielkości x i y podane w tabelce poniżej są wprost proporcjonalne.

x	a	15	3,5
y	12	b	4,2

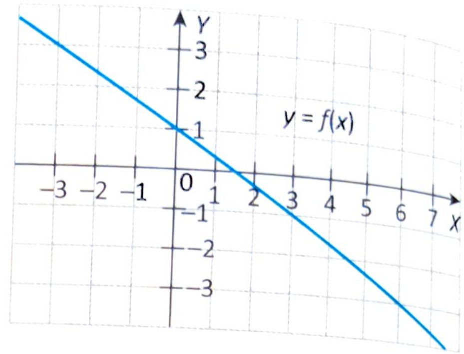
Zatem iloczyn liczb a i b jest równy:

A. 180 B. $\frac{5}{4}$ C. 0,8 D. 3

2. Do wykresu proporcjonalności prostej należy punkt $(6, \sqrt{20})$. Zatem funkcja ta ma wzór:

A. $y = 6x$ B. $y = 2\sqrt{5}x$ C. $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x$ D. $y = 6$

3. Współczynnik kierunkowy występujący we wzorze funkcji liniowej f, której wykres przedstawiony jest obok, jest równy:



A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$
C. $-\frac{2}{3}$ D. 1

4. Punkt $B(-8, 2)$ należy do wykresu funkcji liniowej $f(x) = 0{,}25x + b$. Wobec tego:
A. $b = -4$ B. $b = -2$ C. $b = 2$ D. $b = 4$

5. Liczba 3^{-3} jest wartością funkcji $f(x) = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}$ dla argumentu:
A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{6}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{9}$

6. Funkcja liniowa $f(x) = \frac{3}{4}x - 12$ przyjmuje wartości nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $x \in (16, +\infty)$ B. $x \in (-\infty, 16\rangle$ C. $x \in \langle 16, +\infty)$ D. $x \in (-\infty, 16)$

7. Wykres funkcji liniowej $g(x) = 6 - 4k + kx$ przecina oś OY w punkcie $(0, 10)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
A. $k = -4$ B. $k = -1$ C. $k = -10$ D. $k = 10$

8. Miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = -0{,}25x + \log 100$ jest liczba:
A. 40 B. 20 C. 2 D. 8

9. Dane są funkcje liniowe:

I. $y = -3$ II. $y = -2 + \sqrt{3}x$ III. $y = x \cdot \log_3 \frac{1}{3} + 3$ IV. $y = (\pi - 3)x - 1$

Funkcję malejącą opisuje wzór:
A. I B. II C. III D. IV

10. Funkcja liniowa $f(x) = (9 - m^2)x + m$ jest stała tylko wtedy, gdy:
A. $m = 0$ B. $m = -3$ C. $m = 3$ D. $m \in \{-3, 3\}$

11. Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych, jeśli:
A. $a > 0$ i $b < 0$ B. $a > 0$ i $b > 0$ C. $a < 0$ i $b < 0$ D. $a < 0$ i $b > 0$

12. Motocyklista pokonuje trasę 32 m w 4 sekundy. Ile kilometrów przejedzie ten motocyklista w ciągu 1,5 godziny, jadąc z tą samą prędkością?

A. 40 km B. 40,5 km C. 48 km D. 43,2 km

13. W korporacji taksówkowej obowiązuje następujący system opłaty za przejazd: za pierwszy kilometr 6 zł 30 gr, a za każdy następny (rozpoczęty) kilometr 1 zł 80 gr. Wzór funkcji f opisującej wysokość opłaty za przejazd w zależności od liczby n przejechanych kilometrów to:

A. $f(n) = 1{,}8n + 4{,}5,\ n \in \boldsymbol{N}_+$ B. $f(n) = 1{,}8n + 6{,}3,\ n \in \boldsymbol{N}_+$

C. $f(n) = 6{,}3n + 1{,}8,\ n \in \boldsymbol{N}_+$ D. $f(n) = 6{,}3n - 4{,}5,\ n \in \boldsymbol{N}_+$

14. Wykresy funkcji liniowych $f(x) = 2x - 9$ oraz $g(x) = 12 - x$ przecinają się w punkcie o współrzędnych:

A. $(-7, 19)$ B. $(-7, -23)$ C. $(1, 7)$ D. $(7, 5)$

15. Wykresy funkcji liniowych $f(x) = (7 - k)x - 3k$ oraz $g(x) = 2x + 15$ są równoległe dla pewnej wartości k. Liczba k jest:

A. ujemna B. pierwsza C. złożona D. niewymierna

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

16. Funkcję liniową f opisuje wzór $f(x) = (3 - \pi)x - \pi + 5$.

a) Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OY.

b) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu -1.

17. Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $M(12, 84)$ i $N(-10, -180)$.

a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Oblicz miejsce zerowe tej funkcji.

18. Naszkicuj wykres funkcji liniowej $y = \frac{x}{3} - 2$ i omów jej własności.

19. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -3x + 5$, gdzie $x \in \boldsymbol{N}$.

a) Czy funkcja f ma miejsce zerowe?

b) Czy funkcja f przyjmuje wartość największą?

Uzasadnij odpowiedzi na postawione pytania.

20. Naszkicuj wykres funkcji liniowej $f(x) = -2x + 6$. Następnie odczytaj z wykresu:

a) która z liczb jest większa: $f\left(2 - \sqrt{3}\right)$ czy $f\left(2 + \sqrt{3}\right)$

b) dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne.

21. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 3x - 19$.

a) Oblicz, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nie mniejsze od 2.

b) Wyznacz liczbę a, która spełnia równanie $f(2a) - a = f(1 - a)$.

22. Wyznacz wzór funkcji liniowej wiedząc, że ta funkcja przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (7, +\infty)$, a do jej wykresu należy punkt $(-1, 4)$.

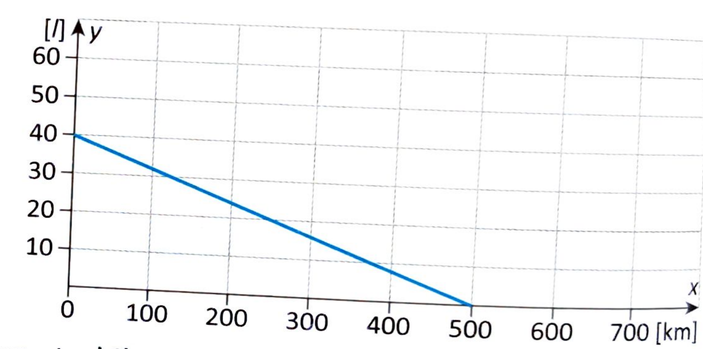
23. Funkcja liniowa f jest opisana wzorem: $f(x) = (2x - 1)^2 - (x - 2)(2 + x) - 3x(x - 2)$.

a) Napisz wzór funkcji f w najprostszej postaci.

b) Wyznacz wzór funkcji liniowej g, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt $P(2019, 2020)$.

D **24.** Wykres funkcji liniowej f przechodzi przez punkty $(0, 4)$ i $(2, 0)$, zaś do wykresu funkcji liniowej g należą punkty $(0, -10)$ i $(-5, 0)$. Wykaż, że wykresy funkcji f i g są do siebie równoległe.

25. Na rysunku obok znajduje się wykres ilustrujący zależność między liczbą litrów benzyny w zbiorniku, a liczbą przejechanych kilometrów przez panią Ewę w czasie podróży samochodem nad Bałtyk, na trasie 500 km.



a) Oblicz, ile średnio litrów benzyny na sto kilometrów spala samochód pani Ewy.

b) Napisz wzór funkcji określającej zależność między liczbą litrów benzyny w zbiorniku, a liczbą przejechanych kilometrów na tej trasie.

c) W kolejnym roku pani Ewa planuje wybrać się samochodem w góry. W zbiorniku mieści się 50 litrów benzyny. Napisz wzór funkcji k, określającej liczbę przejechanych kilometrów w zależności od ilości v spalanej benzyny, bez tankowania, i naszkicuj wykres tej funkcji.

26. We wspólnym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji liniowych określonych wzorami: $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$ i $g(x) = -2x + 4$.

a) Oblicz miejsce zerowe funkcji f oraz miejsce zerowe funkcji g.

b) Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których obie funkcje przyjmują jednocześnie wartości ujemne.

c) Oblicz współrzędne punktu przecięcia się wykresów tych funkcji i sprawdź poprawność rozwiązania z rysunkiem.

d) Podaj, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

27. Dane są dwie funkcje liniowe: $f(x)=-\frac{1}{3}x+5$ oraz $g(x)=\frac{2}{3}x-100$.

a) Wyznacz argument, dla którego funkcje f i g przyjmują tę samą wartość; następnie oblicz tę wartość.

b) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie i jednocześnie funkcja g przyjmuje wartości ujemne?

28. Funkcję f określa wzór $f(x)=\begin{cases} -\frac{3}{2}x-7, & \text{jeśli } x\in(-\infty,-2) \\ x-2, & \text{jeśli } x\in\langle -2,4) \\ \frac{1}{4}x+1, & \text{jeśli } x\in\langle 4,+\infty) \end{cases}$

a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.

b) Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią OY.

c) Naszkicuj wykres funkcji f i omów jej własności.

29. Funkcja liniowa $f(x)=(3m-8)x+5-4m$ jest proporcjonalnością prostą.

a) Wyznacz liczbę m.

b) Dla obliczonej wartości m podaj wzór funkcji f.

c) Czy funkcja f jest rosnąca?

30. Dana jest funkcja liniowa $f(x)=-6x-b$.

a) Dla $b=3$ wyznacz współrzędne punktów przecięcia się wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

b) Dla jakich wartości b miejsce zerowe funkcji f jest liczbą mniejszą od -2?

31. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których funkcja liniowa $f(x)=3m-(2m-14)x$ jest:

a) rosnąca b) malejąca c) stała.

D **32.** Wykaż, że jeśli funkcja liniowa $f(x)=ax+b-2$ jest malejąca i jednocześnie jej wykres przecina oś OY poniżej punktu $P(0,-2)$, to iloczyn $a\cdot b$ jest dodatni.

D **33.** Wykaż, że liczba $\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$ jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x)=\left(3\sqrt{2}-4\right)x+12\sqrt{2}-17$.

34. Ile punktów o obu współrzędnych naturalnych należy do wykresu funkcji liniowej $f(x)=31-2x$?

35. Funkcje liniowe f oraz g opisane są wzorami $f(x) = 4x + 2$ i $g(x) = -x + 7$. Rozwiąż nierówność:

a) $f(4a + 2) \leq g(7 - a)$ b) $f(a - 3) < g(a + 7) + 5a$.

36. Dane są trzy funkcje liniowe: $f(x) = -3x + 2k + 3$, $g(x) = -7$ oraz $h(x) = (3m - 1)x + 4\frac{2}{3}$. Wykresy funkcji f i g przecinają się na osi OY, zaś wykresy funkcji f i h przecinają się na osi OX.

a) Wyznacz wartość m oraz k.

b) Dla wyznaczonych w punkcie a) wartości m oraz k naszkicuj we wspólnym układzie współrzędnych wykresy funkcji f, g, h.

D **37.** Wykaż, że jeśli liczba x_0 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $y = ax + b$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to miejscem zerowym funkcji liniowej $y = bx + a$ jest liczba $\frac{1}{x_0}$.

D **38.** Wykaż, że funkcja liniowa $f(x) = -3x + 30$ dowolnej liczbie całkowitej parzystej przyporządkowuje liczbę całkowitą podzielną przez 6.

D **39.** Wykaż, że funkcja liniowa $f(x) = 5x - 9$ dowolnej liczbie całkowitej nieparzystej przyporządkowuje liczbę, której reszta z dzielenia przez 10 jest równa 6.

D **40.** Wykaż, że do wykresu funkcji liniowej $f(x) = \sqrt{3}x$ należy tylko jeden punkt o obu współrzędnych będących liczbami wymiernymi.

D **41.** Wykaż, że funkcja liniowa $f(x) = 4x - 1$ kwadratowi dowolnej liczby naturalnej przyporządkowuje iloczyn pewnych dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych.

42. Dany jest wzór funkcji f. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

a) $f(x) = \max(4 - 2x, x + 1)$ b) $f(x) = x - |2x - 6|$

5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

5.1. Wśród poniższych równań znajdują się równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Wskaż je.

a) $2x - y^2 = 0$ b) $3x - 5y = 1$ c) $x - \sqrt{y} = 2$

d) $5x = 3 - \sqrt{2}y$ e) $x \cdot y = 8$ f) $-\frac{1}{3}y = 5 - x$

5.2. Dane jest równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y oraz trzy pary liczb (x, y) obok tego równania. Sprawdź, które z tych par liczb spełniają dane równanie.

a) $0 \cdot x - 5y = 8\frac{1}{3}$ $\left(20, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(-9, -3\frac{1}{3}\right)$, $\left(-57, -1\frac{2}{3}\right)$

b) $1{,}2x + 0 \cdot y = 6$ $(0, 6)$, $(5, -12)$, $(-10, 8)$

c) $0{,}625x - 0{,}25y = 0$ $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(4\sqrt{5}, \sqrt{500}\right)$, $(-4, -10)$

d) $\sqrt{3}x - \sqrt{192}y = 10\sqrt{3}$ $\left(0, -1\frac{1}{4}\right)$, $(-6, -2)$, $\left(4, \frac{1}{2}\right)$

5.3. Wyznacz liczby a, b tak, aby obie pary liczb dane obok równania spełniały to równanie.

a) $9x - 2y = 15$ $(a, 15)$, $(-17, b)$

b) $\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 0{,}6$ $\left(3\frac{3}{4}, a\right)$, $(b, -6)$

c) $0{,}3x - 0{,}5y = 1{,}2$ $(-6, a)$, $(b, 9)$

d) $5\sqrt{2}x - \frac{2}{3}y = 0$ $(a, 120)$, $(b, -21)$

5.4. Podaj trzy przykłady par liczb spełniających dane równanie. Następnie w prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj wykres równania i zaznacz na nim punkty, których współrzędne są równe tym parom liczb.

a) $-3x + 5y = 10$ b) $0 \cdot x - 3y = 9$ c) $4x + 0 \cdot y = -12$ d) $5x - 4y = 0$

5.5. Które z poniższych równań opisują tę samą prostą?

a) $12x - 9y = 21$ b) $y = 5x - 20$ c) $\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y - 2\frac{1}{3} = 0$

d) $1\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y = 5$ e) $y = 1\frac{1}{3}x - 2\frac{1}{3}$ f) $0{,}5x - 0{,}1y - 2 = 0$

5.6. Zapisz każdą z poniższych wypowiedzi w postaci równania $ax + by = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) Różnica liczb x i y wynosi -3.
b) Podwojona liczba x jest 4 razy większa od liczby y.
c) Suma liczb x i y jest o 3 większa od różnicy tych liczb.
d) Różnica podwojonej liczby x oraz 50% liczby y jest równa $33\frac{1}{3}$% sumy tych liczb.

5.7. Podaj przykład równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y, którego rozwiązania możemy opisać jako pary liczb mające postać:

a) $(x, 5x - 7)$, $x \in \mathbb{R}$ b) $(9, y)$, $y \in \mathbb{R}$ c) $(x, -2)$, $x \in \mathbb{R}$

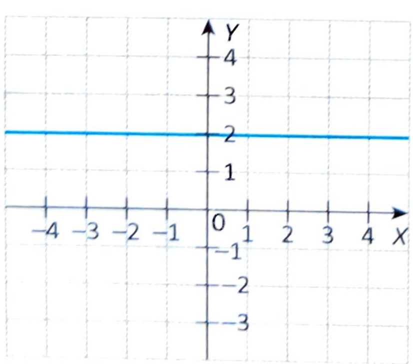
d) $(x, 6x)$, $x \in \mathbb{R}$ e) $(4y - 1, y)$, $y \in \mathbb{R}$ f) $\left(3\frac{1}{2} - \frac{3y}{2}; y\right)$, $y \in \mathbb{R}$.

5.8. Opisz wszystkie pary liczb (x, y) spełniające dane równanie.

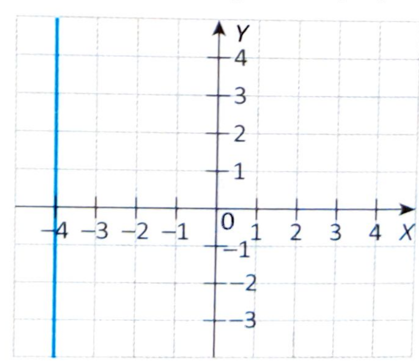
a) $2x + 3y = 5$ b) $0x - 10y = 2$ c) $-5x + 6y = 0$
d) $4x - 0y = 7$ e) $x - y = 3$ f) $-2x + 4y = 8$

5.9. Prosta na rysunku poniżej jest wykresem równania pierwszego stopnia z niewiadomymi x i y. Zapisz to równanie w postaci $ax + by = c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

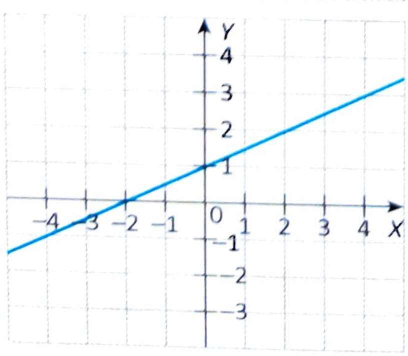
a)



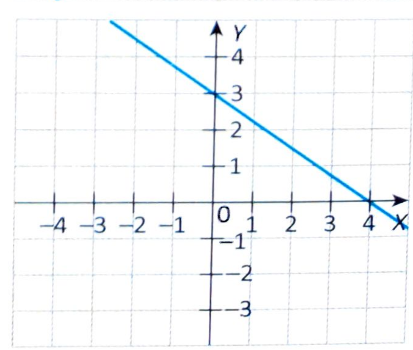
b)



c)

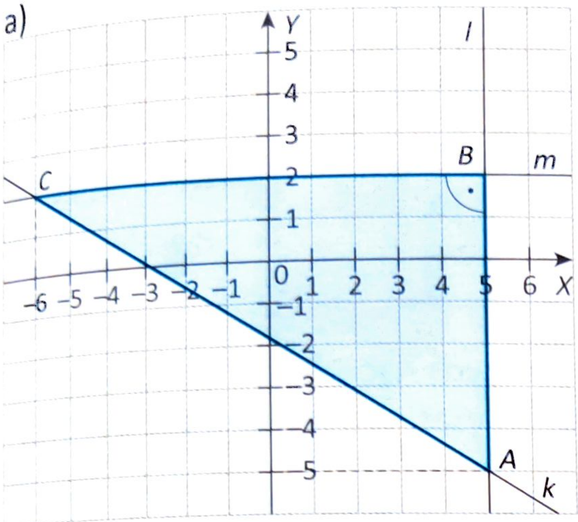


d)

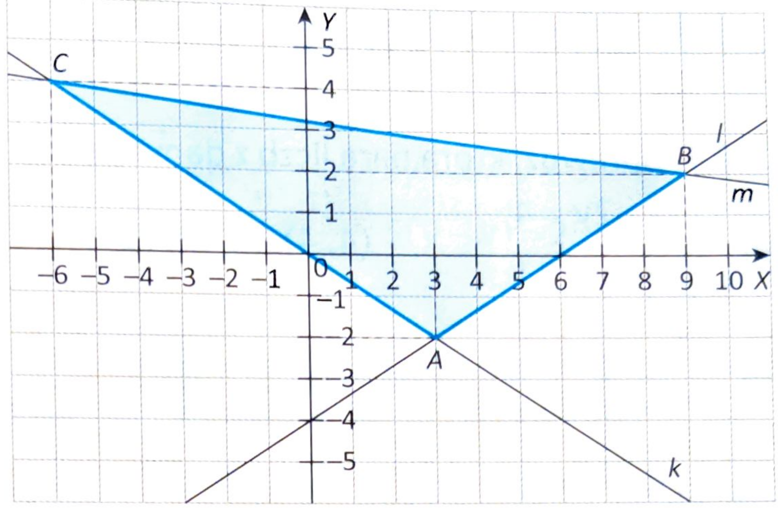


5.10. Napisz równania prostych k, l, m, które wyznaczają trójkąt ABC na rysunku poniżej.

a)



b)



5.11. Podaj wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich, będących rozwiązaniami danego równania.

a) $x + 3y = 18$ b) $x + 5y = 35$ c) $7x + 3y = 21$ d) $3x + 25y = 40$

5.12. Wypisz wszystkie pary liczb całkowitych (a, b), które spełniają dane równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi x i y, wiedząc dodatkowo, że liczby a i b spełniają nierówności zapisane obok tego równania.

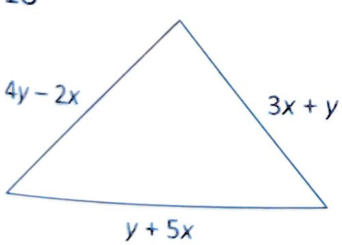
a) $x - 2y = -6$ oraz $a < 0$ i $b > 0$

b) $0{,}25x - 0{,}75y = 3$ oraz $a > 0$ i $b \leq 0$

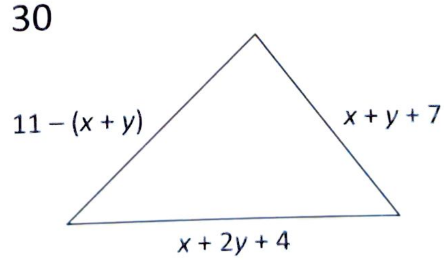
c) $4x + 3y = -18$ oraz $a \leq 0$ i $b < 0$

5.13. Dany jest obwód trójkąta przedstawionego na rysunku. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych (x, y), dla których istnieje taki trójkąt. Dla wyznaczonych par (x, y) podaj długości boków tego trójkąta.

a) 18



b) 30



Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań

5.14. Sprawdź, która para liczb z danych obok układu równań par spełnia ten układ.

a) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 5x+y=11 \end{cases}$ $(4, 4), (1, 2), (2, 1)$

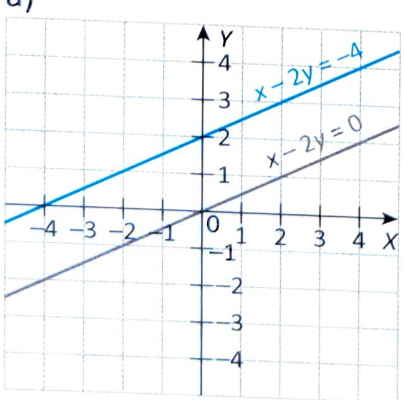
b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ y=2x-6 \end{cases}$ $(-2, -8), (2, 0), (5, 6)$

c) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=\dfrac{2x-1}{3} \end{cases}$ $(-10, -7), (5, 3), (3, 5)$

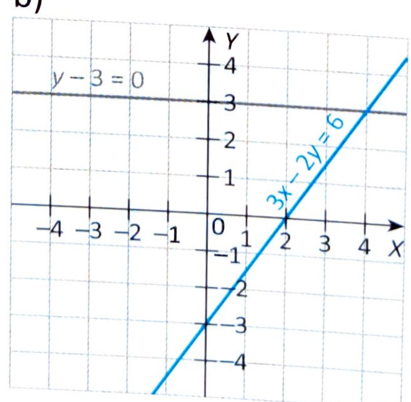
d) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}4y=6 \\ -7x+3y=2 \end{cases}$ $\left(0, \dfrac{2}{3}\right), (-8, 25), (4, 10)$

5.15. Na poniższym rysunku przedstawiona jest ilustracja graficzna pewnego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Napisz ten układ i podaj, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. W przypadku, gdy istnieje rozwiązanie układu, zapisz je.

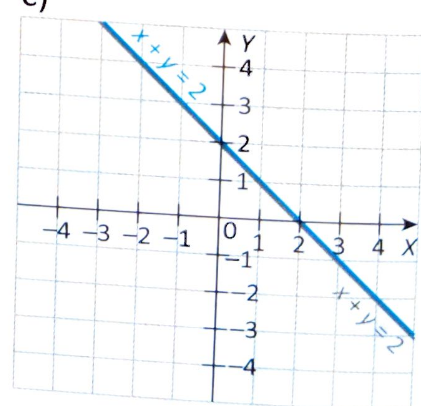
a)



b)



c)



5.16. Poniższe układy równań są układami oznaczonymi. Rozwiąż graficznie każdy z nich. Sprawdź algebraicznie poprawność rozwiązania.

a) $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y=8 \\ x+y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=3x+4 \\ x+2=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=-1 \\ 4x+3y=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-4y=12 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ 3x+y+9=0 \end{cases}$

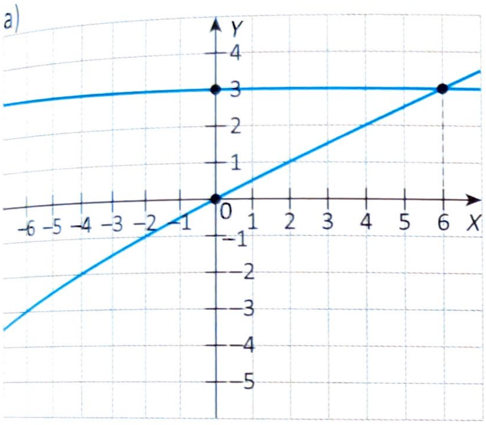
5.17. Rozwiąż graficznie układy równań. Podaj zbiór rozwiązań układu oznaczonego i układu nieoznaczonego.

a) $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x=3y+12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-3 \\ x-2y=4 \end{cases}$

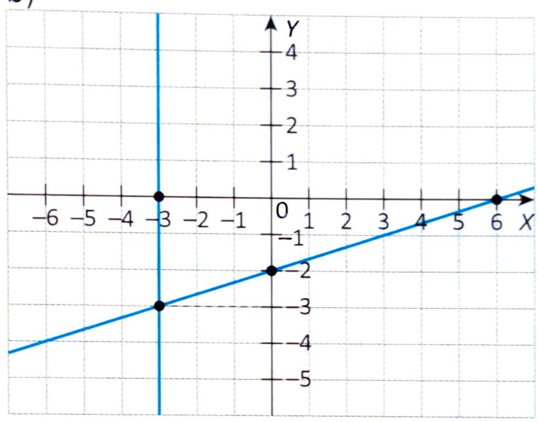
d) $\begin{cases} 0{,}25x-y=2 \\ x=4y+8 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2(x+y)=-3+2y \\ 3(x+1)=2(x+4) \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3y-4=y+6 \\ 5(y-x)=25-5x \end{cases}$

5.18. Napisz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, którego interpretację graficzną przedstawia poniższy rysunek. Podaj jego rozwiązanie, o ile istnieje.

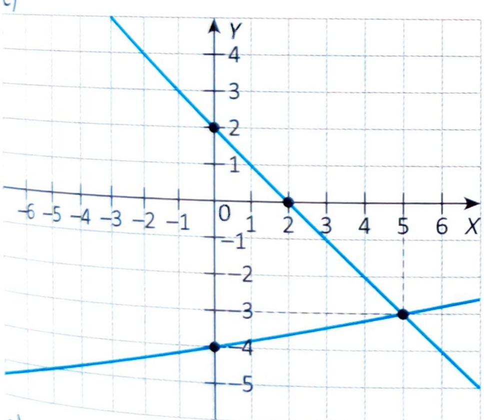
a)



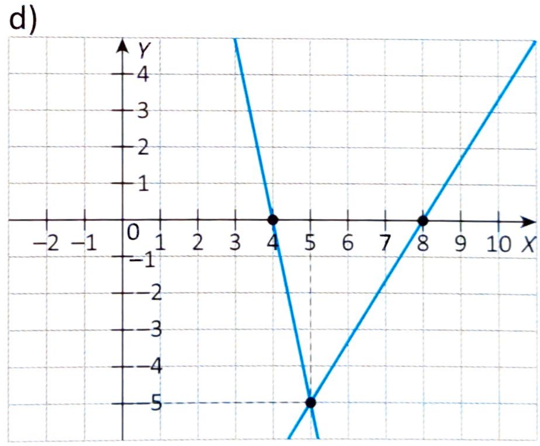
b)



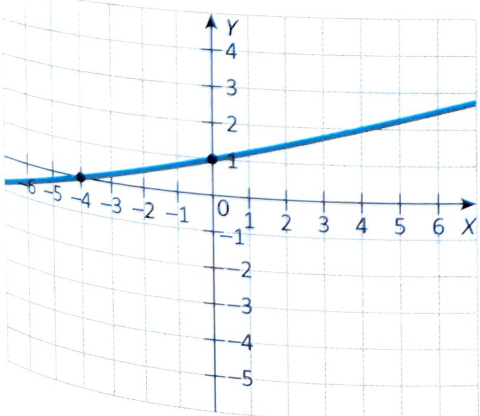
c)



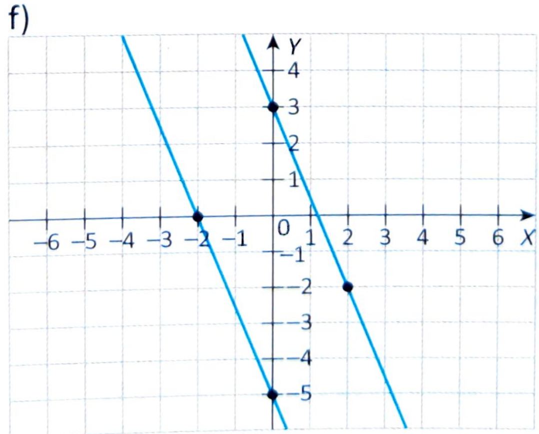
d)



e)



f)



5.19. Wskaż układ sprzeczny, oznaczony i nieoznaczony.

a) $\begin{cases} x-2y=4 \\ x=4+2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 6x-4y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=8 \\ x+y=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1{,}5x-0{,}25y=3 \\ 6x-y=12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+5y=1 \\ x+4=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+7y=14 \\ 3{,}5y=6-0{,}5x \end{cases}$

5.20. Dopisz brakujące równanie układu tak, aby powstały układ równań:

a) $\begin{cases} 3x-5y=7 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był sprzeczny

b) $\begin{cases} 7x+5y=9 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był oznaczony

c) $\begin{cases} 4x-y=0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był nieoznaczony

d) $\begin{cases} 3(x-5)=2x+4 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był oznaczony

e) $\begin{cases} 9x+y=8 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był sprzeczny

f) $\begin{cases} 4x-5y=11 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$ był nieoznaczony.

5.21. Rozwiąż graficznie układy równań.

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{4}=3 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{y+2}{5}-\dfrac{2-x}{2}=2 \\ \dfrac{1}{2}x+y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{3}-\dfrac{x-y}{2}=1 \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{x+4y}{2}=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{1}{6} \\ 2x-3y=-6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{3}+\dfrac{x}{12}=\dfrac{x+1{,}5y}{3} \\ 2(x+2)=3x-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{y-1}{2}-\dfrac{y+2}{3}=0 \\ \dfrac{y-x}{2}-\dfrac{y+x}{4}=y-\dfrac{3}{4}x+1 \end{cases}$

5.22. Rozwiąż graficznie układy równań.

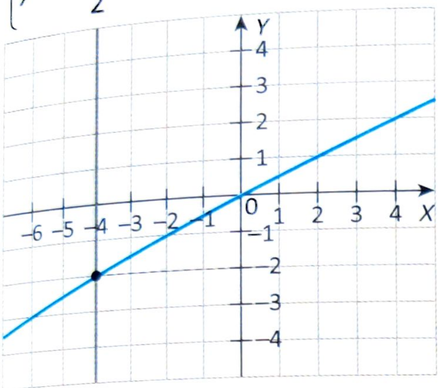
a) $\begin{cases} (x+3)(x-1)+y=(x-1)^2 \\ x-2y=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 13-(3x-1)(3x+1)=2y-(3x-2)^2 \\ y+x=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x+1)^2-2(y+3)=(x+2)^2 \\ x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(x-1)-(y-1)^2=(x-y)(x+y) \\ x-2y=-1 \end{cases}$

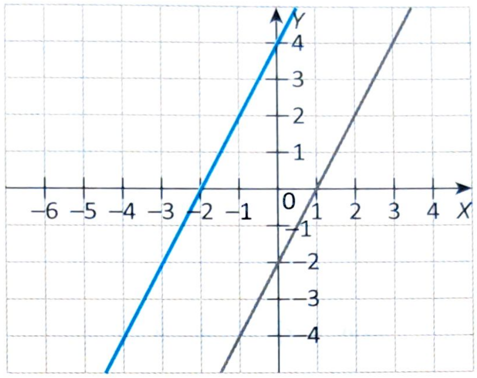
e) $\begin{cases} (x+2y)^2-4y(y+1)=x^2+4xy \\ (x-3)(x+3)-2y=x^2-5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4+(2x-y)(2x+y)-4x^2=x-y^2 \\ \dfrac{x-2}{2}+\dfrac{3x-y}{3}=2 \end{cases}$

5.23. Pod układem równań pierwszego stopnia z niewiadomymi x i y przedstawiona jest interpretacja graficzna tego układu. Wyznacz wartości m oraz n.

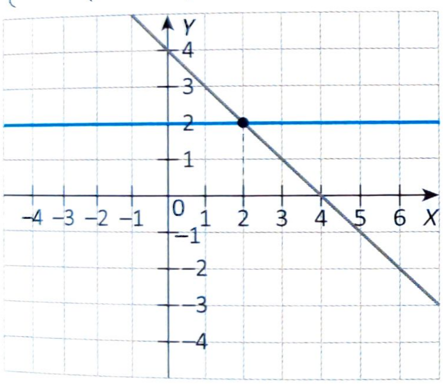
a) $\begin{cases} x-ny+4=0 \\ y=\dfrac{n-m}{2}x \end{cases}$



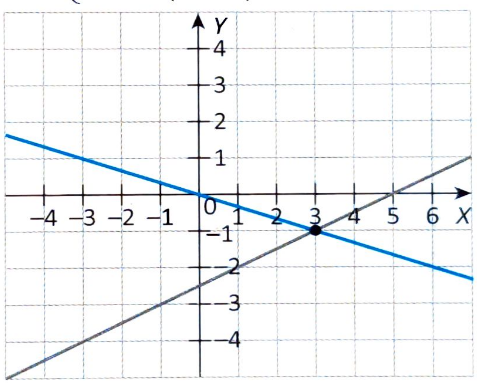
b) $\begin{cases} y=(m-4)x+4 \\ y=(3n-7)x-2 \end{cases}$



c) $\begin{cases} y-m=1 \\ mx+(n-2m)y=4 \end{cases}$



d) $\begin{cases} (m-2)x-ny=5 \\ my+(n-1)x=0 \end{cases}$



Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

5.24. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x=2+y \\ 3x-2y=9 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x+5y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5x+y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=4+y \\ 2x-2y=8 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x+y=3 \\ y=3{,}5-x \end{cases}$
f) $\begin{cases} 0{,}25x+0{,}25y=1 \\ 0{,}75x+0{,}75y=3 \end{cases}$

5.25. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ 5x+y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=0{,}8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+3y=11 \\ -5x+2y=-31 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0{,}6x+1{,}2y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 7x+11y=19 \\ 3x-2y=-12 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 4x+19y=47 \end{cases}$

5.26. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4 \\ 5(x+y)-7(x-y)=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4(3x+y)-(x-2y)=4y+7x \\ 3(2x+3y)+5(x-y)=-18 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(2x-y)-2(x+4y)=6-10y \\ 0{,}5(x-3y)-(4y-x)+8=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-8-(5x+4y)=x-2y \\ 4-2(x-y)+3x=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 16-2(3x-5y)=9y-2x \\ 20-3(x-2y)=5y+9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+3y-2(x-y)=4(y+6) \\ 3(4x-y)-11(x+y)=5-13y \end{cases}$

5.27. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{6}=\frac{1}{2} \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=\frac{1}{6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1\frac{2}{3} \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{2}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3x}{4}-\frac{y}{4}=-1 \\ \frac{5x}{2}+\frac{3y}{8}=16 \end{cases}$

5.28. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} \frac{x-3}{2}-\frac{2x+y}{4}=\frac{x-y}{8} \\ x+y+12=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{7-2x}{3}-\frac{5-3y}{3}=0 \\ 2(y-1)=y+x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2(x-y)}{7}-\frac{x-3y}{21}=\frac{y}{3} \\ 5x-6y=24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{3}-\frac{x+3y}{6}=x-4y \\ 3x-4y=11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x+2y}{2}-\frac{x-y}{8}=\frac{3y+1}{4} \\ 2x+2y=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{4y-3x}{18}-\frac{y+4}{6}=\frac{y}{9} \\ \frac{y-x}{2}=8y+4x \end{cases}$

5.29. Punkt A jest punktem wspólnym prostych k i l. Wyznacz współrzędne punktu A bez szkicowania tych prostych.

a) $k\colon y=3x-4,\quad l\colon y=-x+8$ b) $k\colon y=0{,}5x-1,\quad l\colon y=1{,}5x+3$

c) $k\colon y=-x+6,\quad l\colon y=2x+3$ d) $k\colon y=3x-2,\quad l\colon y=-2x+8$

5.30. Wyznacz wartości a i b, dla których podana obok układu równań para liczb jest rozwiązaniem tego układu.

a) $\begin{cases} -2ax+by=6 \\ ax-3y=1 \end{cases}$ $(-23, -8)$

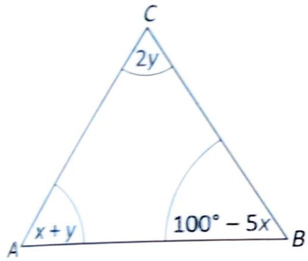
b) $\begin{cases} 5x-ay=8 \\ bx-2ay=4 \end{cases}$ $(2, 1)$

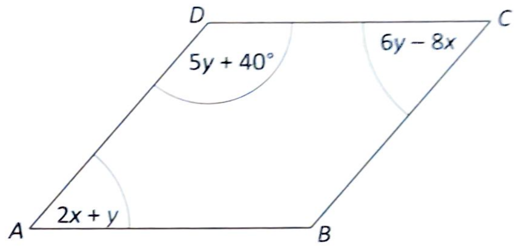
c) $\begin{cases} (5+a)x-3y=b+3 \\ (b-1)x+5y=a+8 \end{cases}$ $\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$

d) $\begin{cases} (a+2)x+(2-b)y=2b \\ (b-2)y-ax=4 \end{cases}$ $(5, 14)$

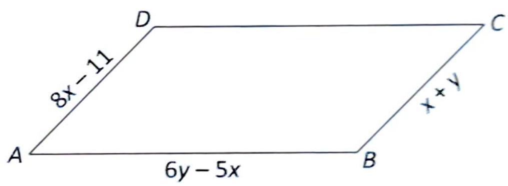
5.31. Oblicz miary kątów wewnętrznych wielokąta na rysunku poniżej:

a) ABC – trójkąt równoramienny, $|AC|=|BC|$ b) $ABCD$ – romb

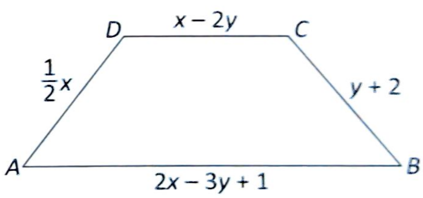




5.32. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, którego bok AB jest o 3 dłuższy od boku BC. Korzystając z informacji podanych na rysunku obok, oblicz długości boków tego równoległoboku.



5.33. Na rysunku obok trapez $ABCD$ jest równoramienny, a jego podstawa AB jest trzy razy dłuższa od podstawy DC. Korzystając z informacji podanych na rysunku, oblicz obwód tego trapezu.



5.34. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} (x-3)(y+1)=xy-5 \\ (x+1)(y-3)=7+x(y-5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2x-y)(y+5)=y(2x-y-4) \\ 3(8x-y)=2(11x-y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-y)(x+2)=x(x-y)+4 \\ \dfrac{2x-3y}{2}=\dfrac{x+y}{6} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x-1)(x+3)-2(y+1)(y+2)+2y^2=3(x^2-y) \\ \dfrac{y-1}{4}=\dfrac{x}{2}-1 \end{cases}$

5.35. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} (x-3)(x+3)+3y-x+2=(x-2)^2+y \\ -2x+y=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(y-x)+4=2y \\ y-(x+1)^2=2-(x-1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (x-1)^2-(y+3)^2=(x-y)(x+y)-2y \\ 3x+5=y \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+1)(y-2)-(x-2)(y+1)=6 \\ (x-y)^2+x+2=x(x-y)-y(x-y)+y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 27y^2-3(2x-3y)^2-2x=y+5-12x(x-3y) \\ (x-3)^2-(y-1)^2+10x=10+x^2-y^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4y=(2x-5)(-5-2x)+(2x+3)^2-34 \\ (3x-2)^2-(3x-y)(3x+y)=y(y-2) \end{cases}$

5.36. Rozwiąż układ równań liniowych z trzema niewiadomymi x, y, z.

a) $\begin{cases} x+z=4 \\ x-y=1 \\ z+y=x \end{cases}$
b) $\begin{cases} y=2-x \\ x+y+z=9 \\ z-y=10 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x+y+z=13 \\ y=4x+1 \\ z+3=2y \end{cases}$

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

5.37. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} -3x+2y=-7 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x-7y=4 \\ x=2\frac{1}{3}y+1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5x-3y=9 \\ 7x+4y=29 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 0{,}3x-0{,}7y=5 \\ 4x+7y=-15 \end{cases}$
e) $\begin{cases} 2x-5y=11 \\ \frac{3}{4}x-2y=4 \end{cases}$
f) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-4y=6 \\ x-6y=9 \end{cases}$

5.38. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=5 \\ \frac{x}{2}=\frac{y}{3}-2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{16}{15}=\frac{1}{5}y \\ \frac{1}{3}x+\frac{y}{5}=\frac{34}{15} \end{cases}$
c) $\begin{cases} \frac{2x}{5}+\frac{y}{3}=1 \\ \frac{x}{2}-\frac{2y}{9}=-4\frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1{,}2x-\frac{2y}{3}=16 \\ \frac{2y}{3}+0{,}2x=5 \end{cases}$
e) $\begin{cases} \frac{1}{8}x+7=0{,}75y \\ 0{,}5x-\frac{1}{6}y=6 \end{cases}$
f) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{9}y=6 \\ 0{,}5y=3x-5 \end{cases}$

5.39. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} \frac{7x-3y}{5}=\frac{5x-y}{3}-\frac{x+y}{2} \\ 3(x-1)=5(y+1) \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x-3y-1=\frac{x-5y}{2}-\frac{1}{2} \\ 1\frac{3}{4}y-\frac{1}{4}x=\frac{3y}{2}+\frac{1}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1-0{,}3(y-2)=\frac{x+1}{5} \\ \frac{y-3}{4}-\frac{4x+9}{20}=-1{,}5 \end{cases}$
d) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{5}-x=\frac{3y-5x}{3}+1 \\ \frac{1}{3}(2x-3y)+5=\frac{4x-3y}{2}+y \end{cases}$

5.40. Do wykresu funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ należą punkty M i N. Ułóż układ równań z niewiadomymi a i b. Następnie oblicz a i b oraz napisz wzór funkcji f.

a) $M(-2, 109)$, $N(1, 13)$
b) $M(20, -1)$, $N(-15, -15)$
c) $M(32, 8)$, $N(-16, 14)$
d) $M(26, 7)$, $N(-6, 15)$

5.41. Wykres funkcji liniowej $y=f(x)$ przechodzi przez punkty $A(21, 8)$ i $B(-9, -12)$. Wykres funkcji liniowej $g(x)=1\frac{1}{6}x-9$ przecina wykres funkcji f w punkcie C.

a) Wyznacz wzór funkcji f.
b) Oblicz współrzędne punktu C.

5.42. Wykresy trzech funkcji liniowych: $f(x)=3x-7$, $g(x)=(a-1)x+3(a+2)$ oraz $h(x)=5x+9$ przecinają się w jednym punkcie.

a) Wyznacz współrzędne tego punktu.
b) Oblicz a.

5.43. Wykresy funkcji liniowych $f(x)=(m-n)x-5n+m$ oraz $g(x)=-3x+3m-8n-2$ przecinają oś OY w tym samym punkcie. Do wykresu funkcji f należy punkt $A(-7, -20)$. Oblicz m i n.

5.44. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} (x-4)(x+4)=(x+2)^2-y \\ \frac{2x-y}{2}-\frac{x-y}{3}=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-2)^2-2(x-2y)=1-(3-x)(3+x) \\ 2x+y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{y+1}{3}=1 \\ (2x-1)^2-(3y+1)^2=(2x-3y)(2x+3y)-32 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)-9(x-1)(x+1)=x-y-4(y-2)(y+2) \\ \frac{y-2}{3}-\frac{x-2}{3}=2\frac{1}{3} \end{cases}$

5.45. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} (2-x)(4x-5)+(2x-1)^2=5y \\ (y-x)^2-(x+4)^2+109=y(y-2x+5) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-1)^2(x-1)-(x-2)^2(x-2)+y=3x(x-2) \\ (2x-3)^2-(2x+1)^2=2(10y-x) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2x+1)\left[1-6x+(2x+1)^2\right]=2x(2x+3)(2x-3)+2y \\ (3x+2)^2-(3x+1)^2-3(y+8)=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (3x-1)^2(2x+3)-8y=3x^2(6x+5)+y-x \\ y(2y-3)(3-2y)+16x^2-54=(4x-3)^2-4(y^3-3y^2-3) \end{cases}$

5.46. Wyznacz dwie liczby naturalne x, y, które spełniają równanie:

a) $x^2-y^2=5$ b) $4x^2-y^2=7$ c) $x^2-9y^2=13$

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań

5.47. Liczba naturalna a jest o 3 większa od podwojonej liczby naturalnej b. Jeśli od liczby b odejmiemy 1, to otrzymana różnica będzie trzy razy mniejsza od liczby a. Wyznacz liczby a i b.

5.48. Liczba x jest o 120 większa od liczby y. Iloraz liczby x przez liczbę y jest równy 6. Wyznacz liczby x i y.

5.49. Znajdź ułamek mający następującą własność: jeśli do licznika tego ułamka dodamy 3, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy liczbę równą $\frac{1}{2}$. Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 5, a od mianownika 3, to otrzymamy liczbę równą $\frac{1}{3}$.

5.50. Jedna z szukanych liczb jest o 25% mniejsza od drugiej liczby. Jeśli do mniejszej liczby dodamy 9, to otrzymana suma będzie o 20% większa od drugiej szukanej liczby. Wyznacz te liczby.

5.51. Suma dwóch liczb jest równa 800. Jeżeli jedną z nich zwiększymy o 25%, a drugą zmniejszymy o 20%, to ich suma zmniejszy się o 52. Co to za liczby?

5.52. Suma cyfr szukanej liczby dwucyfrowej jest równa 12. Jeżeli cyfry tej liczby przestawimy, to otrzymamy liczbę większą o 18 od szukanej liczby. Wyznacz szukaną liczbę.

5.53. Suma cyfr szukanej liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli do tej liczby dodamy 63, to otrzymamy liczbę napisaną za pomocą tych samych cyfr, ale w odwrotnej kolejności. Wyznacz szukaną liczbę.

5.54. Szukana liczba dwucyfrowa jest 21 razy większa od różnicy między jej cyfrą dziesiątek i cyfrą jedności. Jeżeli przestawimy cyfry tej liczby i od nowo otrzymanej liczby odejmiemy 12, to różnica będzie trzy razy większa od sumy cyfr szukanej liczby. Znajdź tę liczbę.

5.55. Suma szukanych dwóch liczb dwucyfrowych jest równa 80. Jeżeli mniejszą z nich dopiszemy do większej z lewej strony, to otrzymamy liczbę o 3168 mniejszą od tej, którą byśmy otrzymali po dopisaniu większej z nich do mniejszej z lewej strony. Wyznacz te liczby.

5.56. Liczbę 135 rozłóż na dwa składniki tak, aby jeden składnik był o 30 większy od 40% drugiego.

5.57. W 1980 roku łączna emisja zanieczyszczeń pyłowych i gazowych w Polsce wynosiła 7,3 mln ton. W ciągu 12 lat emisja zanieczyszczeń pyłowych zmniejszyła się o 70%, a zanieczyszczeń gazowych – o 37% tak, że w sumie masa tych zanieczyszczeń wyniosła 3,84 mln ton. Oblicz, jaka była emisja zanieczyszczeń pyłowych, a jaka gazowych w 1992 roku.

5.58. Jakie wynagrodzenie roczne otrzymała każda z dwóch menadżerek, jeśli pierwsza zarobiła w tym czasie o 49 280 zł więcej niż druga, a 0,9 zarobku pierwszej było równe tyle, co 125% zarobku drugiej menadżerki?

5.59. Pan Kwiatkowski i pan Kowalski wpłacili swoje oszczędności o łącznej wartości 10 000 zł do różnych banków. Pan Kwiatkowski ulokował swoje oszczędności w banku, w którym oprocentowanie roczne wynosiło 1,2%, zaś pan Kowalski w banku, który proponował oprocentowanie roczne w wysokości 1,4%. Po roku łączna kwota odsetek wyniosła 138,4 zł. Ile złotych ulokował w banku każdy z panów?

5.60. Za 16 biletów do cyrku zapłacono 303 zł. Bilet dla dziecka kosztował 15 zł, zaś dla osoby dorosłej był o 60% droższy. Oblicz, ile kupiono biletów dla dorosłych, a ile dla dzieci.

5.61. Firma państwa Kowalskich produkuje kurtki męskie i damskie. W ubiegłym roku wielkość całej produkcji wyniosła 7000 sztuk. Okazało się jednak, że 1,5% kurtek męskich oraz 2% kurtek damskich miało wady. Ile kurtek męskich, a ile damskich wyprodukowała ta firma w ubiegłym roku, jeśli wszystkich kurtek wadliwych było 135?

5.62. Przed dwoma laty ojciec był 10 razy starszy od syna, a za 13 lat będzie od niego 2,5 raza starszy. Ile lat ma obecnie ojciec, a ile syn?

5.63. Szesnaście lat temu matka była 3 razy starsza od córki. Za 10 lat wiek matki będzie o 70% większy od wieku córki. Ile lat ma obecnie matka, a ile córka?

5.64. Przed 10 laty ojciec był cztery razy starszy od córki. Za 10 lat oboje będą mieli razem 100 lat. Ile lat ma obecnie ojciec, a ile córka?

5.65. Jeśli długość danego prostokąta powiększymy o 4 cm, a szerokość o 3 cm, to jego pole zwiększy się o 43 cm^2. Jeśli natomiast jego długość zwiększymy o 7 cm, a szerokość pozostawimy bez zmiany, to jego pole powiększy się o 28 cm^2. Oblicz długość i szerokość danego prostokąta.

5.66. Sprawdzian testowy z matematyki składał się z 50 pytań. Za każdą prawidłową odpowiedź uczeń otrzymywał 3 punkty, zaś za każdą odpowiedź błędną tracił 1 punkt. Na ile pytań uczeń odpowiedział poprawnie, skoro ze sprawdzianu otrzymał 78 punktów?

5.67. Za każde bezbłędnie rozwiązane zadanie uczeń otrzymuje 10 punktów, ale traci 5 punktów za każde źle rozwiązane zadanie. Po rozwiązaniu 20 zadań uczeń zgromadził 80 punktów. Ile zadań uczeń rozwiązał dobrze, a ile źle?

5.68. Różnica dwóch liczb naturalnych dodatnich jest równa 10. Jeżeli większą z nich podzielmy przez mniejszą, to otrzymamy iloraz 3 i resztę 2. Wyznacz te liczby.

5.69. Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 308. Jeżeli większą z nich podzielimy przez mniejszą, to otrzymamy iloraz 7 oraz resztę 28. Wyznacz te liczby.

5.70. Postanowiono obsadzić drogę wierzbami. Jeżeli na każdych 7 metrach posadzić po 2 wierzby, to zostanie 118 wierzb. Jeżeli na każdych 7 metrach posadzić po 3 wierzby, to zabraknie 120 wierzb. Ile wierzb przygotowano do sadzenia i jak długa jest droga?

5.71. Z okazji uroczystości rozpoczęcia roku szkolnego ustawiono w sali gimnastycznej ławki dla wszystkich uczniów. Gdyby na każdej ławce usiadło 6 uczniów, to zabrakłoby dwóch ławek. Gdyby zaś na każdej ławce usiadło 8 uczniów, to zostałyby 3 ławki. Ilu uczniów jest w tej szkole i ile ławek ustawiono w sali gimnastycznej?

5.72. Janek postanowił kupić rower górski. W chwili podjęcia decyzji miał 500 zł oszczędności, kwotę niewystarczającą do zakupu wymarzonego roweru. Zaczął więc odkładać swoje comiesięczne kieszonkowe w wysokości 50 zł, ale cena roweru wzrasta co miesiąc o 20 zł. Gdyby cena roweru nie zmieniała się, to Janek uzbierałby na niego pieniądze o 4 miesiące wcześniej. Jaka była początkowa cena roweru? Po ilu miesiącach Janek będzie mógł kupić wymarzony rower?

5.73. W sklepie są wafle waniliowe po 4 zł za kilogram i czekoladowe po 6 zł za kilogram. Sprzedawca chce zrobić mieszankę tych wafli w cenie 5,50 zł za kilogram. Ile wafli każdego rodzaju powinien zmieszać, aby otrzymać 20 kg mieszanki?

5.74. W dwóch naczyniach znajduje się roztwór wodny soli: w pierwszym naczyniu stężenie procentowe roztworu wynosi 25%, a w drugim jest równe 45%. Po ile kilogramów każdego roztworu należy wziąć, aby otrzymać 8 kg mieszaniny o stężeniu 40%?

5.75. Dwa kawałki stopu – jeden o zawartości 80% czystego złota, drugi o zawartości 40% czystego złota stopiono z 2,4 g czystego złota i otrzymano 12 g stopu o zawartości 78% złota. Jaka była masa każdego z kawałków stopu?

5.76. Ile gramów srebra próby 750 i ile gramów srebra próby 375 należy stopić, aby otrzymać 50 g srebra próby 510?

5.77. Ile trzeba wziąć gramów złota próby 960, a ile próby 375, żeby otrzymać 200 g złota próby 750?

5.78. W jakim stosunku wagowym należy zmieszać syrop cukrowy o stężeniu 20% z syropem cukrowym o stężeniu 40%, aby otrzymać mieszaninę o stężeniu 25%?

5.79. Basia i Kasia mieszkają w odległości 5 km od siebie. Obie dziewczyny wyruszyły naprzeciwko siebie jednocześnie ze swoich domów i doszły na umówione spotkanie po upływie pół godziny. Oblicz średnie prędkości obu dziewcząt wiedząc, że prędkość Basi była o 50% większa od prędkości Kasi.

5.80. Miejscowości A, B oraz C leżą przy tej samej drodze, przy czym miejscowość B leży pomiędzy A i C. Odległość między miejscowościami A i B jest równa 18 km. Dwóch chłopców wyruszyło jednocześnie: Jacek z miejscowości A i Wojtek z miejscowości B, idąc ze stałą prędkością. Gdyby obaj szli naprzeciw siebie, to spotkaliby się po 3 godzinach marszu. Gdyby obaj szli w kierunku miejscowości C, to po 2 godzinach marszu odległość między nimi byłaby równa 20 km. Z jaką prędkością idzie każdy chłopiec?

5.81. Z miast A i B leżących w odległości 35 km wyruszyły naprzeciwko siebie po równoległych torach dwa pociągi osobowe i spotkały się po 15 minutach jazdy. Gdyby pociąg jadący z miasta A jechał z prędkością średnią dwa razy większą, zaś pociąg jadący z miasta B jechał z prędkością średnią cztery razy mniejszą, to pociągi te spotkałyby się również po 15 minutach jazdy. Z jakimi prędkościami średnimi jechały obydwa pociągi?

5.82. Miejscowości A, B oraz C leżą przy tej samej drodze, w podanej kolejności. Z miejscowości A i B odległych o 36 km wyruszają jednocześnie dwaj rowerzyści. Każdy z nich jedzie ze stałą prędkością. Gdyby obaj jechali naprzeciw siebie, to spotkaliby się po $1\frac{1}{8}$ h. Gdyby obaj jechali w kierunku miejscowości C, to po 5 godzinach jazdy odległość między nimi wynosiłaby 24 km. Z jaką prędkością jedzie każdy rowerzysta? Rozpatrz dwa przypadki.

5.83. Statek płynący z prądem rzeki pokonuje odległość 104 km między przystaniami A i B w ciągu 8 godzin, zaś płynąc pod prąd, tę samą odległość pokonuje w ciągu 13 godzin. Oblicz prędkość własną statku i prędkość prądu rzeki.

5.84. Po owalnej bieżni długości 1200 m biegają dwaj chłopcy. Jeśli biegną w tym samym kierunku, to mijają się co 20 minut. Jeśli biegną w przeciwnych kierunkach, to mijają się co 5 minut. Oblicz, z jaką prędkością (w km/h) biegnie każdy z chłopców.

5.85. W pewnej liczbie trzycyfrowej cyfra setek jest o 3 większa od cyfry jedności. Suma cyfr tej liczby jest równa 20. Po zamianie miejscami cyfry setek i dziesiątek otrzymamy liczbę o 180 większą od początkowej. Wyznacz liczbę początkową.

5.86. W nieparzystej liczbie trzycyfrowej, podzielnej przez 5, suma cyfr setek i dziesiątek wynosi 9. Wyznacz tę liczbę, jeśli wiadomo, że po zamianie miejscami cyfry dziesiątek i jedności otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od początkowej.

5.87. Oblicz, ile lat ma obecnie syn, ile lat ma jego ojciec, a ile dziadek, jeżeli wiadomo, że połowa wieku ojca równa się $\frac{1}{4}$ sumy lat dziadka i syna, że 5 lat temu ojciec miał o 35 lat mniej niż dziadek i syn razem oraz że za 3 lata dziadek będzie miał o 7 lat więcej niż ojciec i syn razem.

Test sprawdzający do rozdziału 5.

1. Jednym z rozwiązań równania $3x - 5y = 6$ jest para liczb:
A. $(-6, -4)$ B. $(-9, -7)$ C. $(7, 3)$ D. $(12, 4)$

2. Liczba dodatnia x jest o 25% mniejsza od liczby dodatniej y. Zależność między liczbami dodatnimi x i y opisuje równanie:
A. $x + 25\%x = y$ B. $x - y = 0,25$ C. $x - 0,75y = 0$ D. $0,75x + y = 0$

3. Równanie $2x - 0,125y = 1$ spełniają wszystkie pary liczb mające postać:
A. $(x, 16x - 8), x \in \boldsymbol{R}$
B. $(x, 8 - 16x), x \in \boldsymbol{R}$
C. $\left(x, \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\right), x \in \boldsymbol{R}$
D. $\left(x, \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x\right), x \in \boldsymbol{R}$

4. Jeśli bok prostokąta długości x zwiększymy o 3, a bok długości y zmniejszymy o 2, to otrzymamy prostokąt, którego pole będzie o 9 większe od pola danego prostokąta. Zależność między x i y opisuje równanie:
A. $-3y + 2x = 15$ B. $3x - 2y = 3$ C. $-3x + 2y = 3$ D. $3y - 2x = 15$

5. Wskaż równanie prostej, która jest równoległa do osi OY:
A. $y = 1$ B. $x + y = 0$ C. $x - y = 2$ D. $x = 4$

6. Para $(-2, -10)$ jest rozwiązaniem układu równań:

A. $\begin{cases} -7x+3y=-16 \\ x-y=-8 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 5x-3y=20 \\ -9x+y=8 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+3y=-32 \\ y=5x+1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y-6x=3 \\ x-y=8 \end{cases}$

7. Aby układ równań $\begin{cases} 7x-4y=8 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ był nieoznaczony, wystarczy dopisać równanie:

A. $4x-7y=10$ B. $y=1{,}75x-2$ C. $y=\frac{4}{7}x-2$ D. $y=\frac{7}{4}x+2$

8. Które z poniższych układów są sprzeczne?

I. $\begin{cases} 3x-y=8 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ II. $\begin{cases} -5x+y=6 \\ y=5x+6 \end{cases}$ III. $\begin{cases} 0{,}6x-0{,}2y=1 \\ y=3x-4 \end{cases}$

A. I i II B. tylko I C. I i III D. II i III.

9. Wybierz układ równań, którego rozwiązania są parami liczb mającymi postać $(x, 1-7x)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

A. $\begin{cases} y=7x \\ y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y=1 \\ y=-7x \end{cases}$ C. $\begin{cases} y=1-7x \\ 8x=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 7x+y=1 \\ 2y+14x=2 \end{cases}$

10. Układ równań $\begin{cases} \frac{x-y}{2}-\frac{y+2x}{4}=3 \\ y=x-4 \end{cases}$

A. jest nieoznaczony

B. spełnia para liczb $(-4, 0)$

C. jest sprzeczny

D. spełnia para liczb $(0, -4)$

11. Proste k i l, opisane odpowiednio równaniami $x+y=5$ oraz $x-2y=11$, przecinają się w punkcie o współrzędnych:

A. $(-2, 7)$ B. $(7, -2)$ C. $(-1, -6)$ D. $(6, -1)$

12. Wskaż parę równań, które opisują dwie proste równoległe:

A. $x-y=2$, $y-x=1$

B. $x+y=2$, $x-y=2$

C. $x-2y=0$, $y=2x$

D. $x=1$, $y=2$

13. Różnica dwóch liczb naturalnych x i y jest równa 19. Jeśli większą liczbę podzielimy przez mniejszą y, to otrzymamy iloraz 2 i resztę 3. Który układ równań opisuje warunki zadania?

A. $\begin{cases} x-y=19 \\ x=3y+2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=y+19 \\ x=2y+3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y-x=19 \\ x=2y+3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y=x+19 \\ x=3y+2 \end{cases}$

14. Obwód trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równy 4. Jeśli x oznacza długość przyprostokątnej, zaś y – długość przeciwprostokątnej tego trójkąta, to zależności między x i y opisuje układ równań:

A. $\begin{cases} x+2y=4 \\ \sqrt{2}y-x=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2x+y=4 \\ \sqrt{3}x-y=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 2x+y=4 \\ \sqrt{2}x-y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+2y=4 \\ \sqrt{3}x-y=0 \end{cases}$

15. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+y=0{,}5^{-1} \\ x-y=\log_{\frac{1}{3}}81 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $(-1, 3)$ B. $\left(1\frac{3}{4}, -2\frac{1}{4}\right)$ C. $(3, -1)$ D. $(-3, 5)$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

D **16.** Wykaż, że para liczb $\left(\sqrt{3}-2, \sqrt{3}+2\right)$ spełnia równanie $\frac{x}{\sqrt{3}+2}+\frac{y}{\sqrt{3}-2}=-14$.

17. Wyznacz liczbę a, dla której para liczb $\left(2, -\sqrt{8}\right)$ spełnia równanie $3x-ay=2$.

18. Sprawdź, czy para liczb (a, b) jest rozwiązaniem danego układu równań.

a) $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 4x-5y=-16 \end{cases}$ $(-1, 4)$

b) $\begin{cases} x+y=0 \\ x\log_6 4-y\log_6 9=2 \end{cases}$ $(1, -1)$

19. Rozwiąż dany układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 2b-8a=4 \\ 4a-b=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2c-d=5 \\ 4c-3d=13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x-6y=9 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

20. Rozwiąż dany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} -3a+b=7 \\ 5a-b=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 12x-3y=6 \\ 2y-8x=-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6c-2d=10 \\ 4d-12c=5 \end{cases}$

21. Rozwiąż dany układ równań metodą graficzną. Pamiętaj o sprawdzeniu poprawności rozwiązania.

a) $\begin{cases} y=-2-x \\ y+2x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x=10+2y \\ y-2x=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y=\dfrac{x}{2}+5 \\ 3x+2y=-6 \end{cases}$

22. Rozwiąż algebraicznie dany układ równań i przedstaw jego ilustrację graficzną.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+x}{5}=\dfrac{x+2{,}4}{6} \\ (x+1)(y-4)=(x-19)(y+1) \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2-x^2}{4}=2-y \\ (3x-4)(y-3)=(3y-7)(x-2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} (2x-3)(2x+1)-(2x+3)^2=4y \\ \dfrac{2}{3}(y+2x)=1-\dfrac{y+2x}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} (x-y+1)(x+y+2)=(x-y)(x+y) \\ \dfrac{x-1}{2}-(2-y)=3{,}5x \end{cases}$

23. Wyznacz liczby a i b tak, aby rozwiązaniem układu równań była podana obok tego układu para liczb.

a) $\begin{cases} bx-ay=-18 \\ (a-2b)x-by=2 \end{cases}$ $(-4, 6)$ b) $\begin{cases} (b+0{,}5a)x+ay=-2 \\ 2(a-b)x-4y=4b+a \end{cases}$ $(2, -3)$

24. Wyznacz współczynniki a, b we wzorze funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $P(-4, 6)$, a miejscem zerowym tej funkcji jest liczba 8.

25. Funkcje liniowe $f(x)=2x-m+12$ oraz $g(x)=-0{,}5x+m$ dla argumentu 6 przyjmują tę samą wartość. Oblicz m i podaj rzędną punktu, w którym wykresy funkcji f i g się przecinają.

26. Trzy proste opisane odpowiednio równaniami $2x-3y=5\frac{1}{2}$, $ax+y=3$ oraz $4x-y=1$ przecinają się w tym samym punkcie.

a) Wyznacz współrzędne tego punktu.
b) Oblicz a.

27. Suma cyfr dodatniej liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli zamienimy cyfry tej liczby miejscami, to otrzymamy liczbę o 27 większą od szukanej. Wyznacz szukaną liczbę.

28. Wyznacz obecny wiek ojca i wiek córki wiedząc, że 5 lat temu ojciec był 6 razy starszy od córki, a za 4 lata ojciec będzie trzy razy starszy od córki.

29. W dwóch koszach znajdują się gruszki. Gdyby przełożyć 2 gruszki z drugiego kosza do pierwszego, to w obu koszach byłoby tyle samo gruszek. Gdyby natomiast przełożyć 4 gruszki z pierwszego kosza do drugiego, to w drugim koszu byłoby dwa razy więcej gruszek niż w pierwszym. Ile gruszek jest w każdym koszu?

30. Aleksander trenuje kolarstwo. W poniedziałek podczas treningu przejechał pewną drogę w ciągu 1 godziny i 20 minut. We wtorek jadąc z prędkością o 7 km/h większą pokonał ten sam dystans w czasie o 14 minut krótszym. Oblicz prędkość, z jaką jechał Aleksander drugiego dnia. Jak długi dystans zaplanował chłopiec na poniedziałkowy i wtorkowy trening?

31. Pan Nowak ma sklep z owocami i warzywami. W hurtowni kupił 80 kg jabłek oraz 20 kg papryki czerwonej za łączną kwotę 328 zł. Do ceny hurtowej jabłek sklepikarz doliczył 20% marży, zaś do ceny hurtowej papryki doliczył 25% marży. Wówczas za 5 kg jabłek i 2 kg papryki trzeba było zapłacić w sklepie pana Nowaka 29 zł. Ile kosztuje 1 kg jabłek oraz 1 kg papryki czerwonej w hurcie, a ile w detalu?

32. Pani Kowalska otrzymuje stałe wynagrodzenie miesięczne oraz dodatkowo wynagrodzenie za nadgodziny. Za każdą godzinę nadliczbową otrzymuje 50% więcej niż za godzinę etatową. W marcu miała 20 nadgodzin i otrzymała 3600 zł, zaś w kwietniu miała 16 nadgodzin i otrzymała 3492 zł. Oblicz:
a) stawkę za godzinę nadliczbową
b) stawkę za godzinę etatową
c) wysokość stałego wynagrodzenia miesięcznego.

33. W trójkącie równoramiennym jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego. Wiedząc, że obwód tego trójkąta jest równy 20, oblicz długości jego boków. Rozpatrz dwa przypadki.

34. Chemik ma dwa roztwory soli o różnych stężeniach. Jeśli zmiesza 2 kg pierwszego roztworu i 4 kg drugiego roztworu, to otrzyma roztwór 50%. Jeśli natomiast zmiesza 4 kg pierwszego roztworu i 6 kg drugiego roztworu, to otrzyma roztwór 48%. Jakie było stężenie procentowe każdego z roztworów?

D **35.** Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n większej od 1 para liczb $(-1, 1)$ spełnia równanie $\frac{x}{n+1}+\frac{y}{n-1}=\frac{2}{n^2-1}$ z dwiema niewiadomymi x i y.

36. Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+y-z=-2 \\ x-3y+2z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-z=-4 \\ z-2x+y=7 \\ z-5x+2y=12 \end{cases}$

37. Suma cyfr pewnej liczby trzycyfrowej wynosi 18. Cyfra dziesiątek jest o 1 większa od cyfry jedności. Jeśli zamienimy miejscami cyfrę setek i dziesiątek, to otrzymamy liczbę o 180 większą od początkowej. Wyznacz liczbę początkową.

38. Dziadek, babcia i wnuczek obecnie mają razem 126 lat. Dwa lata temu dziadek miał o 4 lata więcej niż babcia i wnuk razem. Za 6 lat dziadek będzie 7 razy starszy od wnuka. Ile lat mają babcia, dziadek i wnuk?

39. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych spełniających równanie $2x+4y=18$.

40. Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y: $\begin{cases} (2a-1)x-3y=4 \\ ax+4y=b \end{cases}$

a) Rozwiąż ten układ dla $a=1$ i $b=-3$.

b) Wyznacz współczynniki a i b tak, aby rozwiązaniem układu równań była para liczb $(-4, 2)$.

D c) Wykaż, że jeśli ten układ jest nieoznaczony, to $11a+3b+12=0$.

6. Podstawowe własności wybranych funkcji

Funkcja kwadratowa

6.1. Zapisz dany wzór funkcji kwadratowej f w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$. Następnie wypisz współczynniki a, b, c.

a) $f(x) = 3x - 6x^2 + 2(x^2 - 1{,}5x)$
b) $f(x) = x^2 - 2\left(\sqrt{2}x^2 + 4\right)$
c) $f(x) = 2x^2 + x(5\pi - x)$
d) $f(x) = (4 - x)(4 + x) + 3(x - 1)$
e) $f(x) = (3x - 7)^2$
f) $f(x) = 2 - \left(x - \sqrt{3}\right)^2$

6.2. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f. Naszkicuj wykres funkcji f w układzie współrzędnych. Na podstawie wykresu omów własności tej funkcji.

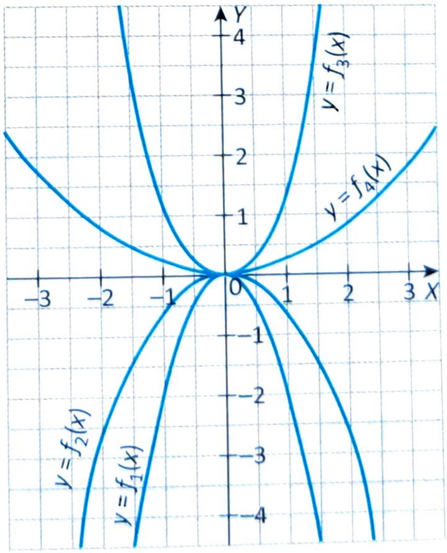
a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2$
b) $f(x) = 3x^2$

6.3. Funkcja kwadratowa ma wzór: $f(x) = -\frac{5}{4}x^2$. Sprawdź, wykonując obliczenia, które z podanych punktów: $A(-2, 5)$, $B(-2, -5)$, $C\left(-2\sqrt{2}, -10\right)$, $D(0{,}5; -0{,}625)$ należą do wykresu funkcji f.

6.4. Napisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, do wykresu której należy punkt:

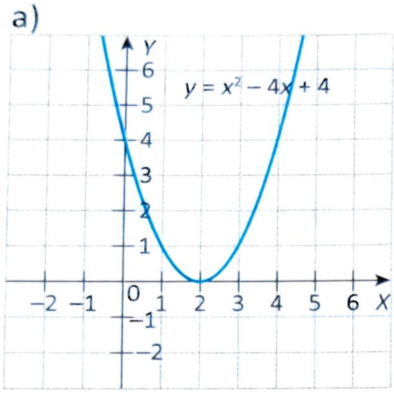
a) $P(-1, 3)$
b) $P(2, -4)$
c) $P(-2, 2)$.

6.5. Na rysunku obok przedstawione są wykresy funkcji kwadratowych: $y = -\frac{2}{3}x^2$, $y = \sqrt{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{5}x^2$. Dopasuj wzory funkcji do ich wykresów.

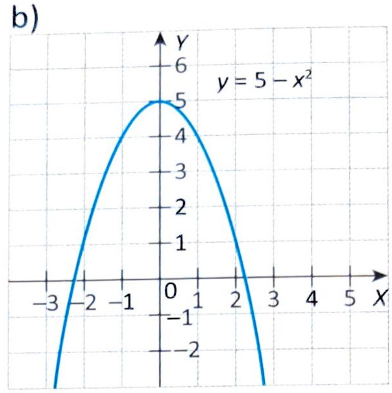


6.6. Parabola na rysunku poniżej jest wykresem danej funkcji kwadratowej. Odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, podaj równanie osi symetrii tej paraboli, maksymalne przedziały monotoniczności danej funkcji oraz zbiór wartości tej funkcji.

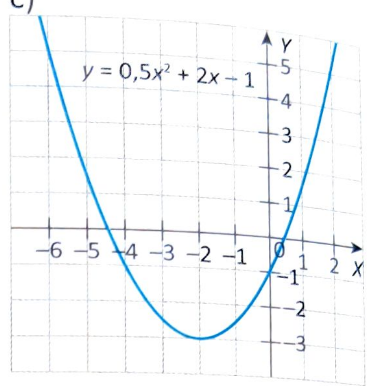
a)



b)

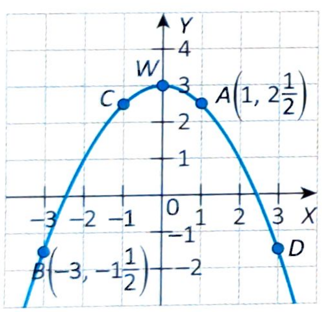


c)

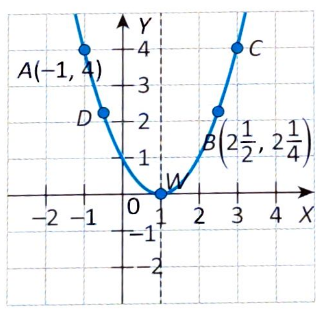


6.7. Parabola na rysunku poniżej jest wykresem funkcji kwadratowej f. Napisz równanie osi symetrii tej paraboli. Następnie wyznacz współrzędne punktów C i D należących do tej paraboli, które są symetryczne odpowiednio do danych punktów A i B względem tej osi symetrii.

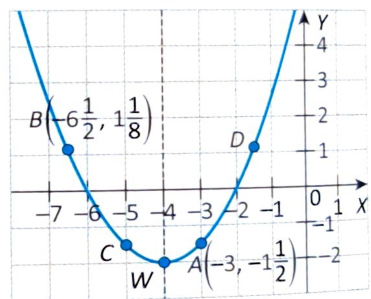
a) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3$



b) $f(x) = (x - 1)^2$



c) $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2$



6.8. Punkty A i B o tej samej rzędnej należą do paraboli, będącej wykresem pewnej funkcji kwadratowej. Wyznacz równanie osi symetrii tej paraboli.

a) $A(0, 5)$, $B(14, 5)$ b) $A(-1, 2)$, $B(7, 2)$ c) $A(-9, 0)$, $B(7, 0)$

6.9. Dany jest wierzchołek W paraboli będącej wykresem pewnej funkcji kwadratowej oraz punkt A należący do tego wykresu. Wyznacz współrzędne punktu B leżącego do tego wykresu i symetrycznego do punktu A względem osi symetrii paraboli.

a) $W(1, 0)$, $A(-5, -36)$ b) $W(-3, 1)$, $A(-6, 19)$ c) $W(4, -5)$, $A\left(7, -\frac{1}{2}\right)$

6.10. Funkcję kwadratową f opisuje wzór w postaci kanonicznej. Uzupełnij tabelkę znajdującą się poniżej danego wzoru funkcji. Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f?

a) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

b) $f(x)=-2(x+1)^2+7$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$							

6.11. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz równanie osi symetrii tej paraboli.

a) $f(x)=2(x-3)^2+1$ b) $f(x)=(x+5)^2-2$ c) $f(x)=4(x+1)^2$
d) $f(x)=-5x^2-3$ e) $f(x)=-(x-7)^2$ f) $f(x)=6-2(x+4)^2$

6.12. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres tej funkcji, znajdując współrzędne wierzchołka, współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY oraz współrzędne kilku innych punktów należących do tego wykresu. Następnie podaj zbiór wartości funkcji f i maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x)=x^2-4$ b) $f(x)=-x^2+1$ c) $f(x)=-(x+3)^2$
d) $f(x)=2(x+1)^2-3$ e) $f(x)=-(x-2)^2-1$ f) $f(x)=\frac{1}{4}(x-4)^2$

6.13. Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej podaj:

- zbiór wartości funkcji f
- współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem funkcji f
- równanie osi symetrii tej paraboli
- maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

a) $f(x)=\frac{3}{4}x^2-7$ b) $f(x)=-\frac{2}{3}(x-8)^2$

c) $f(x)=\sqrt{3}\left(x+\sqrt{2}\right)^2-1$ d) $f(x)=-\frac{2}{5}x^2+3$

e) $f(x)=3\left(x-\sqrt{5}\right)^2-16$ f) $f(x)=-25\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-1$

6.14. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Sprowadź ten wzór do postaci ogólnej.

a) $f(x)=3(x+2)^2-6$ b) $f(x)=-2(x-3)^2+18$

c) $f(x)=(x+5)^2-24$ d) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-10$

6.15. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej. Stosując odpowiedni wzór skróconego mnożenia wyznacz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $y = x^2 + 2x + 1$ b) $y = x^2 - 2x + 3$ c) $y = -x^2 - 2x + 4$

d) $y = -4x^2 + 4x - 1$ e) $y = 2x^2 + 8x + 5$ f) $y = -3x^2 - 18x - 20$

6.16. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f. Wyznacz współrzędne wierzchołka W paraboli, będącej wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ b) $f(x) = 36 - 12x + x^2$ c) $f(x) = x^2 + 8x$

d) $f(x) = -x^2 - 6x$ e) $f(x) = 3x^2 - 12x - 63$ f) $f(x) = 2x^2 - 20x + 40$

6.17. Doprowadź wzór funkcji f do postaci kanonicznej. Następnie wyznacz zbiór wartości funkcji f oraz maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x$ b) $f(x) = 2x^2 + 28x$ c) $f(x) = x^2 + 10x + 17$

d) $f(x) = -x^2 + 12x - 36$ e) $f(x) = 2x^2 - 12x + 12$ f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 12$

6.18. Sprawdź, które z liczb podane obok wzoru funkcji kwadratowej f są jej miejscami zerowymi.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; $-1, 2, 3,$ b) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$; $-2, 1, 5,$

c) $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$; $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -2$ d) $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$; $-1, -\frac{1}{5}, 1$

6.19. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f.

a) $f(x) = 4x^2 - 8x$ b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 12x$

c) $f(x) = -8x^2 + 4x$ d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$

6.20. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f.

a) $f(x) = 9x^2 - 81$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

c) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$ d) $f(x) = -100x^2 - 1$

6.21. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f.

a) $f(x) = x^2 + 10x + 25$ b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 32$ d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 3$

6.22. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.

a) $f(x) = (x-1)^2 - 4$
b) $f(x) = -(x+3)^2 + 9$
c) $f(x) = 4(x-5)^2 - 16$
d) $f(x) = -9(x+2)^2 + 36$
e) $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$
f) $f(x) = -0{,}5(x+7)^2 - 1$

6.23. Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f, doprowadzając najpierw wzór tej funkcji do postaci kanonicznej.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
b) $f(x) = -x^2 - 8x - 15$
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$
d) $f(x) = 0{,}5x^2 + 8x + 32$
e) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3$
f) $f(x) = 4x^2 - 24x - 28$

6.24. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji, a następnie współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji.

a) $f(x) = (x+3)(x-5)$
b) $f(x) = 3x^2 - 42x$
c) $f(x) = 9 - 6x + x^2$
d) $f(x) = -2x - 3x^2$
e) $f(x) = 5x^2 + 10x + 5$
f) $f(x) = 2(x-1)(x+9)$

6.25. Dany jest wzór funkcji kwadratowej f. Wyznacz:

1) współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f;
2) miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją);
3) współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią OY oraz współrzędne punktu symetrycznego do niego względem osi symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f.

Na podstawie wykonanych obliczeń naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = -(x-3)^2 + 4$
b) $f(x) = -3(x+1)^2$
c) $f(x) = x^2 - 3x$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
e) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$
f) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

6.26. Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, mając dane jej miejsca zerowe x_1 i x_2 oraz zbiór wartości ZW.

a) $x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ ZW = \langle -8, +\infty)$
b) $x_1 = -1,\ x_2 = 5,\ ZW = (-\infty, 3\rangle$
c) $x_1 = 3,\ x_2 = 7,\ ZW = (-\infty, 4\rangle$
d) $x_1 = 1\frac{1}{2},\ x_2 = -6\frac{1}{2},\ ZW = \langle -12, +\infty)$

6.27. Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, mając dane współrzędne wierzchołka W paraboli będącej wykresem tej funkcji oraz jedno z jej miejsc zerowych.

a) $W(4, 2);\ x_1 = 3$
b) $W(-2, -3);\ x_1 = 0$
c) $W(-5, 9),\ x_1 = -8$

Funkcja kwadratowa – zastosowania

6.28. Dany jest prostokąt o bokach długości 2 i 4. Krótszy bok zwiększono o x, a dłuższy zmniejszono o x i w ten sposób otrzymano nowy prostokąt.

a) Wyznacz wzór funkcji P określającej pole nowego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę.

b) Oblicz pole nowego prostokąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości $1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

c) Przedstaw wzór funkcji P w postaci kanonicznej.

d) Naszkicuj wykres funkcji P w prostokątnym układzie współrzędnych.

6.29. Dany jest kwadrat o boku długości 3. Jeden z jego boków zwiększono o x, a drugi zmniejszono o x i w ten sposób otrzymano nowy prostokąt.

a) Wyznacz wzór w postaci kanonicznej funkcji P określającej pole nowego prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę.

b) Oblicz pole prostokąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości $\frac{1}{2}, 1, 2\frac{3}{4}$.

c) Wyznacz wymiary prostokąta, którego pole jest równe 5.

d) Na podstawie wykresu tej funkcji rozstrzygnij, czy funkcja P przyjmuje wartość największą lub wartość najmniejszą.

6.30. Rozważamy wszystkie trójkąty, których suma długości podstawy x i wysokości poprowadzonej na tę podstawę jest równa 10.

a) Wyznacz wzór funkcji P określającej pole takiego trójkąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę.

b) Oblicz pole trójkąta w przypadku, gdy x przyjmuje kolejno wartości 2, 4, 6, 8.

c) Naszkicuj wykres funkcji P.

d) Czy funkcja P ma wartość największą? Jeśli tak, podaj tę wartość i dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana.

6.31. Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, których suma długości przyprostokątnych x i y jest równa 16.

a) Wyznacz pole tego trójkąta jako funkcję zmiennej x i podaj jej dziedzinę.

b) Oblicz pole trójkąta w przypadku, gdy $x = 10$.

c) Dla jakiej wartości x pole tego trójkąta jest równe 14?

D d) Wykaż, że funkcja pola osiąga największą wartość dla argumentu 8.

6.32. Liczba 20 jest sumą dwóch składników, z których jeden jest równy x.

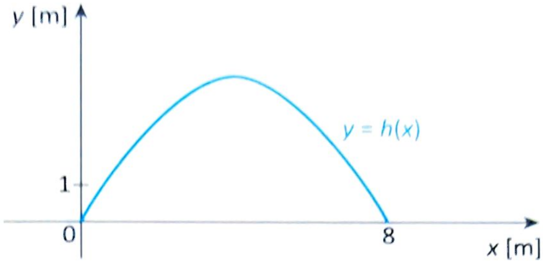
a) Wyznacz wzór funkcji f określającej wartość sumy kwadratów tych składników w zależności od x i podaj jej dziedzinę.

Oblicz wartość sumy w przypadku, gdy $x = 2$ oraz gdy $x = 4$.

b) Przedstaw wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

c) Czy funkcja f ma wartość najmniejszą? Jeśli tak, podaj tę wartość i dla jakiego argumentu jest ona przyjmowana.

6.33. Tor lotu piłeczki, przedstawiony na rysunku obok, opisuje wzór: $h(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, gdzie $x \in (0; 8)$. Na jaką największą wysokość wzniosła się piłeczka?



6.34. Funkcja $f(x) = \dfrac{-x^2 + 6x + 21}{2}$ opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy x, w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie 7^{00}. O której godzinie jego wydajność jest największa?

6.35. Rzucono kamień z prędkością początkową 10 m/s pionowo do góry. Wysokość S [m], jaką osiągnie kamień po t sekundach, określona jest w przybliżeniu funkcją $S(t) = 10t - 5t^2$. Jaką największą wysokość osiągnie ten kamień?

6.36. Pewne ciało w czasie t [s] przebyło drogę S [m], którą opisuje wzór $S(t) = t^2 + 5t + 8$, gdzie $t \in \langle 1; 5 \rangle$. Oblicz:

a) długość drogi przebytej przez to ciało w ciągu czterech sekund

b) średnią prędkość ciała.

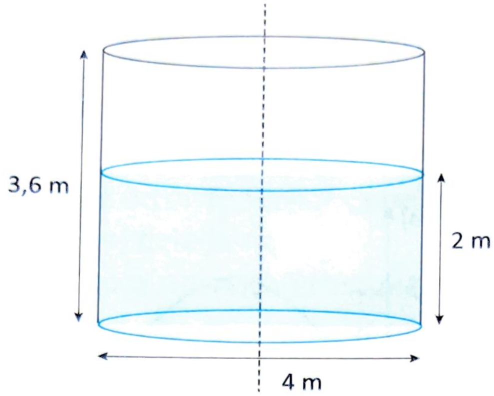
6.37. Pani Monika wykonuje ręcznie figurki na choinkę, które sprzedaje do hurtowni. Cotygodniowy dochód pani Moniki (w zł) w zależności od liczby n sprzedanych figurek opisuje funkcja $d(n) = \dfrac{n^2}{2} + 2n - 48$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, ..., 50\}$. Oblicz, ile figurek musi sprzedać tygodniowo pani Monika, aby:

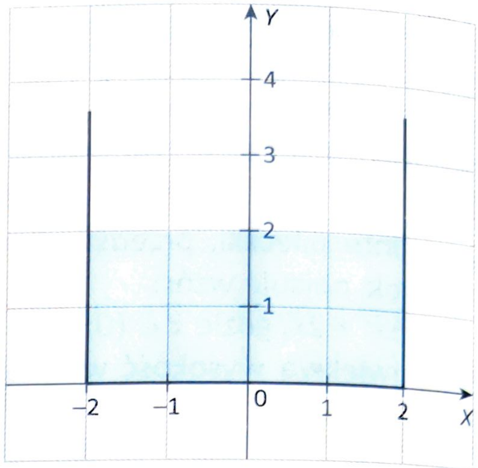
a) pokryć stałe koszty tygodniowej działalności

b) uzyskać tygodniowy dochód w wysokości 832 zł.

6.38. Zależność mocy P baterii samochodowej, od natężenia prądu I określa wzór $P(I) = V \cdot I - I^2 \cdot r$, gdzie V – napięcie, zaś r – opór wewnętrzny baterii. Jakie powinno być natężenie prądu, aby moc baterii była maksymalna?

6.39. Mamy zbiornik cylindryczny, czyli mający kształt walca, którego podstawa ma średnicę 4 m, a wysokość jest równa 3,6 m. Zbiornik ten został napełniony cieczą do wysokości 2 m. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, jak na rysunku poniżej.





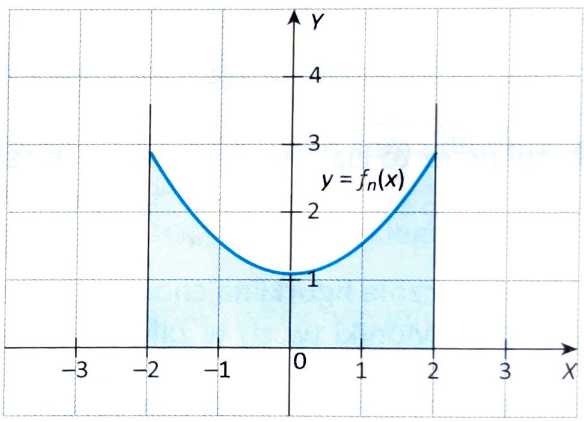
Jeśli taki zbiornik zacznie się obracać wokół osi symetrii (wokół osi OY), to przekrój powierzchni cieczy będzie miał kształt fragmentu paraboli, który można – w przybliżeniu – opisać wzorem funkcji:

$$f_n(x) = \frac{n^2}{2000}x^2 + \frac{2000 - n^2}{1000}, \quad x \in \langle -2, 2 \rangle$$

gdzie n oznacza liczbę obrotów na minutę.

a) Wyznacz wzór funkcji f_{10}.

b) Rysunek poniżej przedstawia wykres funkcji $y = f_n(x)$ dla pewnej wartości n.



Wyznacz n wiedząc, że wierzchołek paraboli ma współrzędne $\left(0, 1\frac{1}{10}\right)$.

c) Jaka jest maksymalna prędkość obrotowa, dla której ciecz nie będzie się ze zbiornika wylewać?

Proporcjonalność odwrotna

6.40. Sprawdź, czy zmienne x i y, których zależność przedstawia tabela, są odwrotnie proporcjonalne.

a)

x	5	$\frac{1}{3}$	$0{,}25$	$3\frac{2}{3}$	$-\sqrt{2}$	-4	10
y	$0{,}4$	6	8	$\frac{6}{11}$	$-\sqrt{2}$	$0{,}5$	$\frac{1}{5}$

b)

x	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{5}$	$\sqrt{2}-1$	$3-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}-\sqrt{7}$	$4-\sqrt{15}$	$5-2\sqrt{6}$
y	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{5}$	$\sqrt{2}+1$	$3+2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}+\sqrt{7}$	$4+\sqrt{15}$	$5+2\sqrt{6}$

6.41. Uzupełnij tabelkę tak, aby zmienne x i y były odwrotnie proporcjonalne.

a)

x	-50		25	$0{,}4$		$10-5\sqrt{2}$
y		$-\frac{1}{3}$	2		$10\sqrt{2}$	

b)

x	2^4	2^{-3}	$16\sqrt{2}$			2^{15}	
y	2^3			256	$4\sqrt[3]{2}$		1024

6.42. Do wykresu proporcjonalności odwrotnej $y=\frac{a}{x}$ należy dany punkt A. Wyznacz współczynnik a i narysuj wykres otrzymanej proporcjonalności odwrotnej.

a) $A(-1,-4)$ b) $A(2,-1)$ c) $A\left(\frac{1}{2},3\right)$

6.43. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu 10, których długości boków są równe x i y.

a) Napisz wzór funkcji określającej długość boku y w zależności od długości boku x.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

6.44. Rozpatrujemy wszystkie równoległoboki o polu 14, których jeden z boków ma długość x, a wysokość poprowadzona na ten bok jest równa y.

a) Napisz wzór funkcji określającej wysokość y w zależności od x.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

6.45. Pieszy przebył drogę długości 6 km ruchem jednostajnym.

a) Napisz wzór funkcji opisującej czas t pokonania drogi 6 km przez pieszego w zależności od prędkości v [km/h] ruchu pieszego i naszkicuj jej wykres.

b) Oblicz, ile minut potrzebuje pieszy na przejście drogi długości 6 km, jeżeli porusza się z prędkością 5 km/h.

c) Z jaką prędkością szedł pieszy, który drogę 6 km pokonał w czasie 100 minut?

6.46. Samochód osobowy jadący ze średnią prędkością 70 km/h pokonuje pewną drogę w czasie 2 godzin i 12 minut. W jakim czasie pokona tę drogę motorowerzysta jadący ze średnią prędkością 22 km/h? Z jaką prędkością należy jechać, aby tę drogę pokonać w czasie 3,5 h?

6.47. Zapas żywności w stołówce szkolnej dla 60 osób wystarczy na 5 dni. Na ile dni wystarczyłoby tej żywności, jeśli liczba osób stołujących się w szkole wzrosłaby o 40 osób (zakładamy, że racje żywieniowe pozostaną takie same)?

6.48. Brygada 16 robotników na wykonanie pewnej liczby części samochodowych potrzebuje 8 godzin i 15 minut. Ile czasu potrzeba na wykonanie tej samej pracy brygadzie 12 robotników, przy założeniu, że wydajność pracy każdego robotnika się nie zmieni?

6.49. Odległość między miastami A i B jest równa 45 km. Pociąg pokonuje trasę z miasta A do B ze średnią prędkością v. Gdyby jechał z prędkością o 25 km/h większą, to przyjechałby do miasta B o 18 minut wcześniej. Gdyby jechał z prędkością o 5 km/h mniejszą, to przyjechałby do miasta B o 6 minut później. Oblicz prędkość v.

6.50. Odległość między miastami A i B jest równa 48 km. Autobus PKS pokonuje trasę z miasta B do miasta A w określonym czasie t. Gdyby jechał z prędkością o 15 km/h mniejszą niż zwykle, to przyjechałby do miasta A o 16 minut później. Gdyby jechał z prędkością o 12 km/h większą, to przyjechałby do miasta B o 8 minut wcześniej. Oblicz t.

6.51. Studentka postanowiła przepisać na komputerze rękopis swojej pracy magisterskiej w określonym czasie, przepisując codziennie stałą liczbę stron. Jeśli przepisze dziennie o 6 stron więcej niż zaplanowała, to skończy tę pracę o 5 dni wcześniej. Jeśli przepisze dziennie o 2 strony mniej, to skończy przepisywanie o 3 dni później niż zamierzała. Ile stron liczy praca magisterska tej studentki?

6.52. Na podstawie wykresu funkcji $y = \frac{-8}{x}$ wypisz wszystkie pary liczb całkowitych (a, b), spełniające równanie $x \cdot y = -8$.

6.53. Ile par liczb naturalnych (a, b) spełnia równanie:
a) $x \cdot y = 7$
b) $x \cdot y = 15$
c) $x \cdot y = 16$?

6.54. Ile par liczb całkowitych (a, b) spełnia równanie:
a) $x \cdot y = -9$
b) $x \cdot y = -30$
d) $x \cdot y = 64$?

6.55. Wypisz wszystkie pary liczb naturalnych (a, b), które spełniają równanie:
a) $(x+5) \cdot y = 12$
b) $x \cdot (y-2) = 10$
c) $(x-7)(y+4) = 20$

6.56. Motocyklista poruszający się ze stałą prędkością przejechał drogę z miasta A do miasta B w ustalonym czasie. Jeśli jechałby z prędkością o 6 km/h większą, to czas przejazdu byłby o 1 godzinę krótszy; gdyby zaś jego prędkość była o 5 km/h mniejsza, to czas przejazdu byłby o 1 godzinę i 12 minut dłuższy. Z jaką prędkością jechał motocyklista i w jakim czasie przebył drogę z A do B? Jaką długość ma droga między miastami A i B?

6.57. Siostry Ania i Jola sprzedają wiosną tulipany w różnych punktach miasta. Pewnego dnia podzieliły między sobą 70 tulipanów w taki sposób, że Ania otrzymała x tulipanów, a Jola y tulipanów. Każda z niech ustaliła inną cenę za 1 tulipana. Po sprzedaży wszystkich kwiatów okazało się, że obie dziewczyny otrzymały taką samą kwotę. Gdyby Ania sprzedała y tulipanów, to otrzymałaby 45 zł. Gdyby Jola sprzedała x tulipanów, to otrzymałaby 80 zł. Oblicz, ile tulipanów sprzedała Ania, a ile Jola. W jakiej cenie za sztukę sprzedawały tulipany Ania i Jola?

Funkcja wykładnicza

6.58. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $P(3, 8)$.
a) Napisz wzór funkcji f.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 2.

6.59. Do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ należy punkt $P(-2, 4)$.
a) Napisz wzór funkcji f.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nie większe niż 1?

6.60. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = 3^x$, gdzie $x \in (-1, 2)$

b) $f(x) = 4^{-x}$, gdzie $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right)$

c) $f(x) = 2^{-x}$, gdzie $x \in \langle -2, 3 \rangle$

d) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$, gdzie $x \in (0, 6)$

6.61. Zapisz dane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $10^2,\ 10^{-1},\ 10^{\sqrt{3}},\ 10^{-0,5}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^0,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{1,5}$

c) $\sqrt[3]{0,5};\ 0,5;\ \sqrt[4]{0,5};\ \sqrt[3]{0,5\sqrt{0,5}}$

d) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}},\ \left(\sqrt{3}\right)^{1,4},\ \left(\sqrt{3}\right)^{2-\sqrt{2}},\ \sqrt[4]{3}$

6.62. Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^7,\ 2^{\pi},\ 4^{1,5},\ (0,5)^{-2\sqrt{2}}$

b) $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\sqrt{3}},\ \left(\sqrt{3}-1\right)^2,\ \left(\sqrt{3}-1\right)^{1,8},\ \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

6.63. W laboratorium podgrzano pojemnik z płynem, a następnie pozwolono, by płyn wystygł. Temperaturę płynu $T(°C)$ opisuje wzór funkcji $T(t) = 90 \cdot 1,5^{-0,2t}$, gdzie t oznacza czas stygnięcia w minutach.

a) Jaką temperaturę miał płyn, gdy rozpoczął się proces stygnięcia?

b) Jaką temperaturę miał płyn po 5 minutach studzenia, a jaką po 10 minutach?

6.64. Liczbę bakterii w dogodnym środowisku po t dniach od chwili rozpoczęcia badań opisuje funkcja $f(t) = c \cdot a^t$, gdzie $t \in \langle 0, +\infty)$. Wiedząc, że po jednym dniu badań liczba bakterii była równa 15 000, a po dwóch dniach wynosiła 45 000, oblicz:

a) współczynniki c i a

b) ile bakterii liczyła ta kolonia w chwili rozpoczęcia badań

c) ile bakterii liczyła ta kolonia po tygodniu badań.

Funkcja logarytmiczna

6.65. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ należy punkt $P(9, 2)$.

a) Oblicz a.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są ujemne?

6.66. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ należy punkt $P(4, -2)$.

a) Oblicz a.

b) Naszkicuj wykres funkcji f.

c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie mniejsze niż -1?

d) Wyznacz wartość wyrażenia $6 \cdot f(\sqrt{2})$.

6.67. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

a) $f(x) = \log_2 x$, gdzie $x \in (0, 8\rangle$

b) $f(x) = \log_{0,5} x$, gdzie $x \in \langle 1, 4)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$, gdzie $x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$

d) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$, gdzie $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 9\right\rangle$

6.68. Zapisz podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $\log 3,\ \log 5,\ 1,\ \log 2$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 3,\ 0,\ \log_{\frac{1}{4}} \pi,\ -1$

c) $1,\ \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}-1),\ \log_{\frac{1}{2}} 3,\ \log_{\frac{1}{2}} 5$

d) $0,\ \log_3 \frac{1}{2},\ 0{,}5\log_3 2,\ 1+\log_3 \frac{1}{10}$

6.69. Wykaż, że:

a) $\frac{1}{2} < \log 5 < 1$

b) $1\frac{1}{2} < \log_2 3 < 2$

c) $-1 < \log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$

d) $-3 < \log_{\frac{1}{2}} 5 < -2$.

Test sprawdzający do rozdziału 6.

1. Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3(x+2)^2$, jest punkt o współrzędnych:

A. $(2, 0)$ B. $(-2, 0)$ C. $(-3, -2)$ D. $(-3, 2)$

2. Wykres funkcji $f(x) = 3(x-2)^2$ przecina oś OY w punkcie o współrzędnych:

A. $(2, 0)$ B. $(0, 3)$ C. $(0, -12)$ D. $(0, 12)$

3. Funkcja kwadratowa $f(x) = (x-4)^2 + 5$ jest rosnąca w przedziale:

A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 5\rangle$ C. $\langle 4, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$

4. Funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe: -5 i 3. Osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta o równaniu:

A. $x = -1$ B. $y = -1$ C. $x = -2$ D. $y = -2$

5. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2 - (x+1)^2$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, jest przedział:

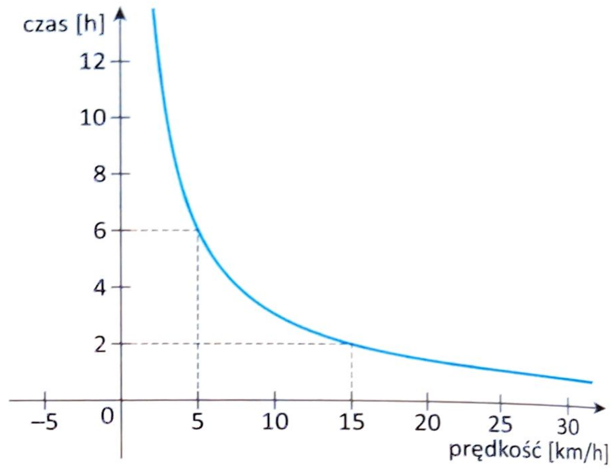
A. $(-\infty, 1\rangle$ B. $\langle 1, +\infty)$ C. $\langle 2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2\rangle$

6. Kran dostarczający 6 litrów wody na minutę napełnia wannę w ciągu 15 minut. Przy jakim dopływie wody (w litrach na minutę) wanna zostałaby napełniona w ciągu 12 minut?

A. 4,5 B. 4,8 C. 5 D. 7,5

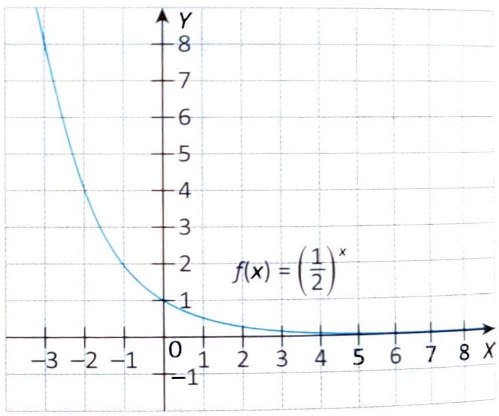
7. Pojazd poruszający się ruchem jednostajnym pokonuje ustaloną drogę s. Na rysunku obok znajduje się wykres proporcjonalności odwrotnej, opisujący czas przejazdu tego pojazdu w zależności od jego prędkości. Z wykresu wynika, że:

A. $s = 35$ km B. $s = 30$ km
C. $s = 25$ km D. $s = 20$ km



8. Na rysunku obok znajduje się wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, gdzie $x \in \mathbf{R}$. Zatem $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$
C. $x \leq -2$ D. $x \geq -2$



9. Miejscem zerowym funkcji $y = \log_3 x$ jest liczba:

A. 0 B. 1 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

10. Wskaż nierówność fałszywą:

A. $\log_{0,5} 3 < \log_{0,5} 5$ B. $\left(\sqrt{2}\right)^3 < \left(\sqrt{2}\right)^5$
C. $(0{,}1)^{\sqrt{5}} < (0{,}1)^{\sqrt{3}}$ D. $\log_4 3 < \log_4 5$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. Dany jest wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = -4(x - 0{,}5)^2 + 8$.

a) Podaj współrzędnej wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f.

b) Wyznacz współrzędne punktu wspólnego wykresu tej funkcji i osi rzędnych.

c) Doprowadź wzór funkcji do postaci ogólnej.

12. Doprowadź wzór funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej i wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.

a) $y = 2x^2 - 28x + 98$ b) $y = -x^2 + 10x$ c) $y = 9x^2 + 6x - 3$

13. Podaj dwa przykłady funkcji kwadratowych, które nie mają miejsc zerowych i zapisz wzory tych funkcji w postaci kanonicznej.

14. Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej podaj zbiór wartości tej funkcji, równanie osi symetrii paraboli będącej jej wykresem oraz maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca.

a) $f(x) = 8 - 2x^2$ b) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}$

15. Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej f. Odczytaj z wykresu własności tej funkcji.

a) $f(x) = -2x^2 + 2$ b) $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}$

16. Rozważamy wszystkie prostokąty, których obwód jest równy 12. Niech x oznacza długość jednego z boków takiego prostokąta.

a) Wyznacz wzór funkcji określającej pole prostokąta w zależności od x i podaj jej dziedzinę.

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

c) Czy funkcja pola przyjmuje wartość największą? Jeśli tak, to podaj tę wartość.

d) Oblicz długość x, dla której pole prostokąta jest równe 5.

17. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

a) Podaj wszystkie pary liczb całkowitych, spełniające równanie $x \cdot y = 5$.

b) Wyznacz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 1.

18. Kacper pociął sznur na pewną liczbę kawałków równej długości. Gdyby liczba kawałków była o 3 większa, to każdy kawałek byłby o 5 cm krótszy. Gdyby liczba kawałków była o 2 mniejsza, to każdy kawałek byłby o 5 cm dłuższy. Na ile kawałków Kacper pociął sznur? Jagą długość miał sznur przed pocięciem go na kawałki?

19. Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2^{-x}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

a) Porównaj liczby $f(\pi)$ i $f(3)$.

b) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq 2$.

20. Do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, należy punkt $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

a) Oblicz a.

b) Wyznacz wartość wyrażenia $f(40) - f(5)$.

c) Narysuj wykres funkcji f.

d) Wyznacz zbiór argumentów, dla których spełniona jest nierówność $f(x) \leq 2$.

D **21.** Korzystając z własności funkcji kwadratowej wykaż, że jeśli $x + y = 7$, to $x^2 + y^2 \geq 24\frac{1}{2}$.

22. Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$. Wyznacz współczynniki b i c wiedząc, że suma miejsc zerowych funkcji f jest równa 2, zaś zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -4, +\infty)$.

D **23.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{-7}{2x}$ w przedziale $(-\infty, 0)$ jest rosnąca.

24. Dane są funkcje $f(x) = 4^{-x}$ oraz $g(x) = \log_{0,25} x$.

D a) Wykaż, że $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Naszkicuj wykresy obydwu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

c) Odczytaj z wykresu, dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

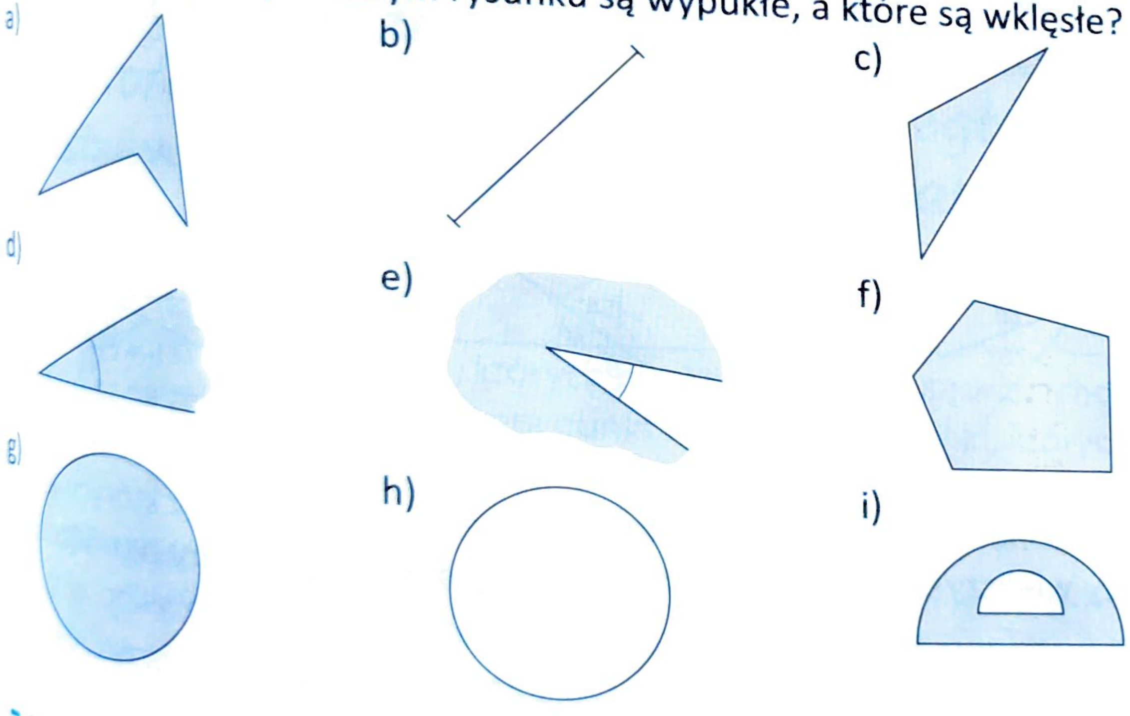
Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona

7.1. Punkty C i D dzielą odcinek AB na takie trzy odcinki AC, CD i DB, dla których $|AC| : |CD| : |DB| = 5 : 8 : 3$. Wiedząc, że $|CD| = 32$ cm, oblicz długość odcinka AB i DB.

7.2. Punkt C należy do odcinka AB. Środkiem odcinka AC jest punkt D, a środkiem odcinka BC jest punkt E. Oblicz długość odcinka AB, wiedząc, że $|DE| = 11$ cm.

7.3. Punkty A, B, C, D należą do jednej prostej i są położone jak na rysunku poniżej. Wiedząc, że $|AD| = 12$ cm, $|AC| = 6$ cm i $|BD| = 8$ cm, oblicz długości odcinków AB, BC, CD.

7.4. Które figury na poniższym rysunku są wypukłe, a które są wklęsłe?



7.5. Które z podanych figur są figurami ograniczonymi?

a) półpłaszczyzna
b) wielokąt
c) koło
d) suma dwóch prostych równoległych
e) odcinek
f) kąt

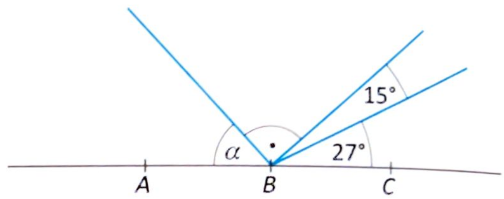
7.6. Dwie półproste o wspólnym początku, wyznaczają dwa kąty: wklęsły i wypukły. Wyznacz miary tych kątów wiedząc, że różnią się o $100°$.

7.7. Z punktu A prowadzimy cztery różne półproste: $AB^{\rightarrow}$, $AC^{\rightarrow}$, $AD^{\rightarrow}$, $AE^{\rightarrow}$. Z czterech kątów: BAC, CAD, DAE, EAB każdy następny jest dwa razy większy od poprzedniego. Wyznacz te kąty.

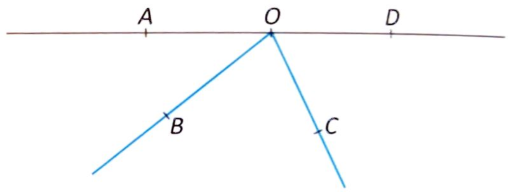
7.8. Wyznacz miary kątów AOB i BOC, wiedząc, że $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle BOC| = 225°$ i przedłużenie półprostej OA dzieli kąt BOC w stosunku $1 : 3$. Rozpatrz dwa przypadki.

7.9. Przez wierzchołek kąta: a) rozwartego, b) ostrego AOB poprowadzono dwie proste prostopadłe do ramion. Oblicz $|\sphericalangle AOB|$, wiedząc, że te proste tworzą kąt ostry $25°$.

7.10. Oblicz α, wiedząc, że punkty A, B, C są współliniowe.

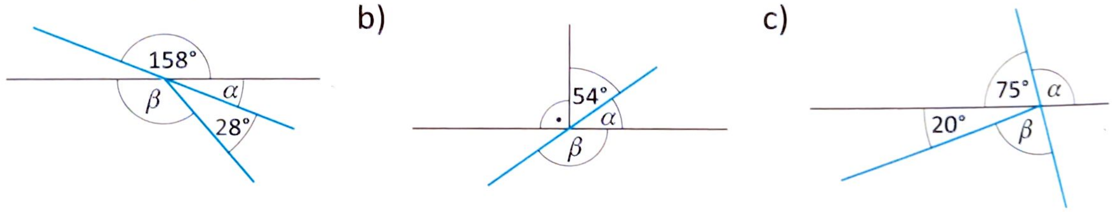


7.11. Wiedząc, że $|\sphericalangle AOC| = 115°$, $|\sphericalangle DOB| = 140°$, oblicz $|\sphericalangle AOB|$, $|\sphericalangle BOC|$ i $|\sphericalangle COD|$.



7.12. Oblicz α i β:

a) b) c)



7.13. Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, z których jeden jest osiem razy większy od kąta do niego przyległego. Wyznacz miary tych kątów.

7.14. Dwie przecinające się proste wyznaczają cztery kąty wypukłe, przy czym różnica kątów przyległych wynosi $44°$. Wyznacz miary tych kątów.

7.15. Miarę kąta wyrażoną w minutach i sekundach wyznacz w stopniach według wzoru:

$$23'51'' = \frac{23°}{60} + \frac{51°}{3600} = \frac{23° \cdot 60}{60 \cdot 60} + \frac{51°}{3600} = \frac{1431°}{3600} = 0{,}3975°$$

a) $9'18''$ b) $54'36''$ c) $48'45''$ d) $32'6''$

7.16. Miarę kąta wyrażoną w stopniach zapisz za pomocą minut i sekund.

a) $0{,}41°$ b) $0{,}24°$ c) $0{,}68°$ d) $0{,}74°$

7.17. Na prostej AB leży punkt C. Ustal wzajemne położenie punktów A, B, C, jeśli:

a) $|AC| = |AB| + |BC|$ b) $|AB| > |BC|$
c) $|AB| - |BC| = |AC|$ d) $|AC| < |AB|$

7.18. Podaj przykład dwóch figur nieograniczonych, których różnica jest:

a) figurą ograniczoną b) figurą nieograniczoną.

Wykonaj odpowiedni rysunek.

7.19. Na płaszczyźnie mamy dane dwie proste równoległe k, l. Na prostej k leżą trzy punkty: A_1, A_2, A_3, a na prostej l – cztery punkty: B_1, B_2, B_3, B_4. Ile jest odcinków CD takich, że $C \in \{A_1, A_2, A_3\}$, $D \in \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$?

7.20. Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest półprostych wyznaczonych przez te punkty?

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

7.21. Narysuj trzy proste k, l, m, których punkty przecięcia są wierzchołkami trójkąta. Zaznacz na zewnątrz tego trójkąta punkt A. Wyznacz odcinki, których długości są odległościami punktu A od prostych k, l, m.

7.22. Odległość między dwiema prostymi równoległymi k i l jest równa 7 cm. Punkt A leży w odległości 4 cm od prostej k. Jaka jest odległość punktu A od prostej l? Rozważ dwa przypadki.

7.23. Narysuj odcinek AB o długości 6 cm.

a) Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj symetralną tego odcinka.

b) W jakiej odległości od punktów A, B znajduje się punkt P należący do symetralnej odcinka AB, jeżeli jego odległość od tego odcinka jest równa 4 cm?

7.24. Narysuj odcinek. Za pomocą cyrkla i linijki podziel go na cztery równe części.

7.25. Dany jest odcinek AB oraz punkty: C_1, C_2, C_3, C_4 i C_5 spełniające następujące warunki:

a) $|C_1A| = \frac{20}{9}$ i $|C_1B| = 2\frac{2}{9}$

b) $|C_2A| = \frac{3}{2}$ i $|C_2B| = 1,(5)$

c) $|C_3A| = \sqrt{6}$ i $|C_3B| = 2\sqrt{3}$

d) $|C_4A| = 2\sqrt{2}$ i $|C_4B| = \sqrt{8}$

e) $|C_5A| = \sqrt{3} - 1$ i $|C_5B| = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$.

Które z punktów C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 należą do symetralnej odcinka AB?

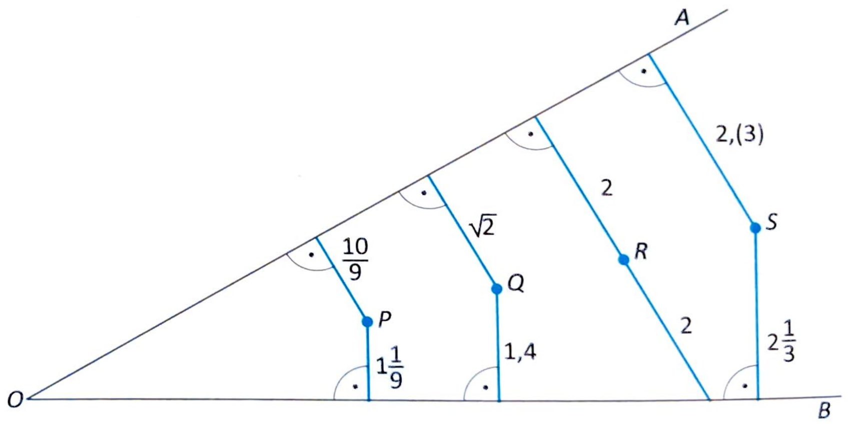
7.26. Za pomocą cyrkla i linijki skonstruuj kąt o mierze $90°$. Następnie:

a) skonstruuj dwusieczną tego kąta

b) oblicz, w jakiej odległości od ramion kąta prostego znajduje się punkt P należący do dwusiecznej tego kąta, jeżeli jego odległość od wierzchołka kąta jest równa $\sqrt{8}$.

7.27. Narysuj dowolny kąt rozwarty, którego miara jest mniejsza od $180°$. Następnie za pomocą cyrkla i linijki podziel ten kąt na 4 równe kąty o wspólnym wierzchołku.

7.28. Które spośród punktów P, Q, R, S należą do dwusiecznej kąta AOB?



7.29. Skonstruuj symetralne boków trójkąta różnobocznego:

a) ostrokątnego b) prostokątnego c) rozwartokątnego.

Czy dwusieczne kątów tych trójkątów zawierają się w symetralnych ich boków?

7.30. Skonstruuj dwusieczne kątów trójkąta równobocznego. Czy dwusieczne kątów tego trójkąta zawierają się w symetralnych jego boków?

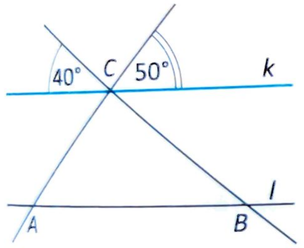
7.31. Jaką miarę ma kąt, którego dwusieczna:
a) jest prostopadła do ramion tego kąta
b) dopełnia każde z ramion kąta do prostej
c) pokrywa się z ramionami tego kąta?

7.32. Na ile części rozcinają płaszczyznę trzy różne proste? Rozpatrz wszystkie przypadki.

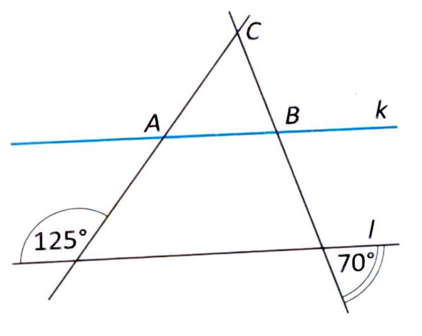
Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie

7.33. Wyznacz miary kątów trójkąta *ABC*, korzystając z danych na rysunkach oraz wiedząc, że $k \parallel l$:

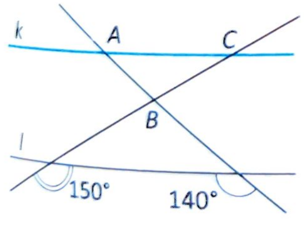
a)



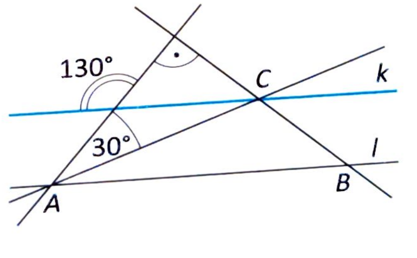
b)



c)



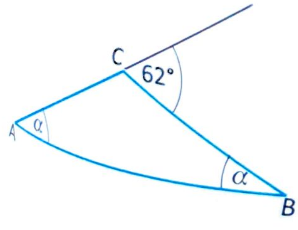
d)



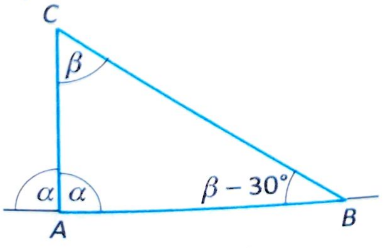
7.34. Z punktu leżącego na zewnątrz kąta *ABC* o mierze 41° poprowadzono dwie proste: jedną równoległą do *BC*, a drugą prostopadłą do *AB*. Wyznacz miarę kąta między tymi prostymi.

7.35. Wyznacz kąty trójkąta *ABC* na rysunku poniżej.

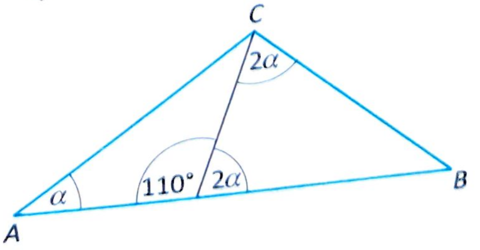
a)



b)

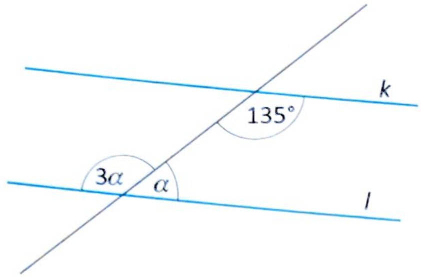


c)

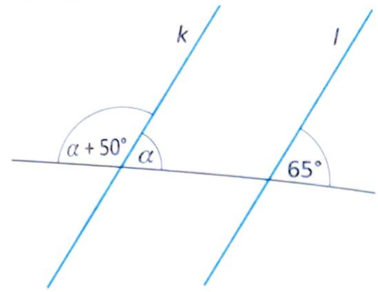


D 7.36. Wykaż, że proste k i l na rysunku poniżej są równoległe.

a)

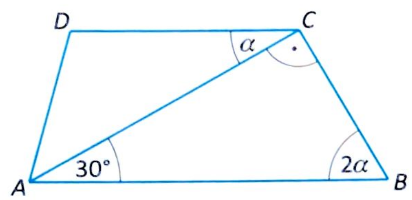


b)

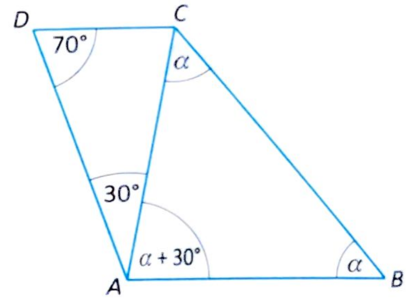


D 7.37. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ na rysunku poniżej jest trapezem.

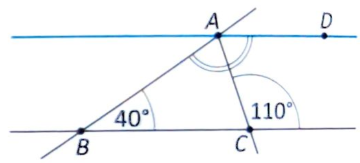
a)



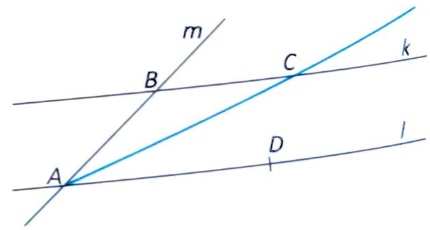
b)



D 7.38. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty A, B, C, D (zobacz rysunek obok). Prosta AB tworzy z prostą BC kąt $40°$, zaś kąt przyległy do kąta ACB ma $110°$. Wykaż, że jeśli półprosta AC jest dwusieczną kąta BAD, to prosta AD jest równoległa do prostej BC.



D 7.39. Prosta m przecina dwie równoległe proste k, l odpowiednio w punktach B i A. Na prostej k zaznaczono punkt C w taki sposób, że $|BC| = |AB|$ (zobacz rysunek obok). Wykaż, że półprosta $AC^{\rightarrow}$ jest dwusieczną kąta DAB.

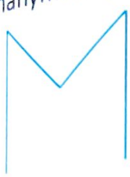


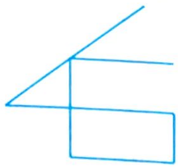
D 7.40. W trójkącie ABC dwusieczna kąta B przecina bok AC w punkcie B_1. Przez punkt B_1 prowadzimy równoległą do BC, przecinającą bok AB w punkcie C_1. Wykaż, że $|B_1C_1| = |BC_1|$.

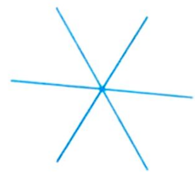
D 7.41. W kątach przyległych ABC, DBC poprowadzono dwusieczne i prostą, równoległą do AD, która przecina te dwusieczne odpowiednio w punktach E i F, zaś ramię BC przecina w punkcie K. Wykaż, że $|EK| = |KF|$.

Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie

7.42. Które z poniższych figur są łamanymi, które są łamanymi zwyczajnymi, a które łamanymi zwyczajnymi zamkniętymi? Odpowiedź uzasadnij.

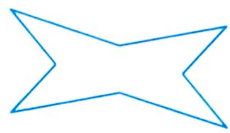
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

7.43. Wyznacz liczbę przekątnych:

a) sześciokąta
b) ośmiokąta
c) piętnastokąta.

7.44. W jakim wielokącie liczba przekątnych jest:

a) trzy razy większa od liczby boków
b) pięć i pół raza większa od liczby boków
c) osiem razy większa od liczby boków?

7.45. Na brzegu jeziora mieszkało 16 rybaków. Mroźną zimą, gdy gruba tafla lodu pokryła jezioro, rybacy, odwiedzając się nawzajem, wydeptali ścieżki tak, że domy dowolnych dwóch rybaków były połączone ścieżką. Ile było ścieżek?

7.46. Na przyjęciu spotkało się 20 osób. Ile nastąpiło powitań, jeśli każda osoba przywitała się z każdą inną osobą?

7.47. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych:

a) sześciokąta
b) siedmiokąta
c) dwunastokąta.

7.48. Oblicz miarę kąta wewnętrznego:

a) ośmiokąta foremnego
b) osiemnastokąta foremnego.

7.49. Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 150°. Jaki to wielokąt?

7.50. W pięciokącie kąty wewnętrzne kolejno mają się do siebie jak 1 : 3 : 3 : 4 : 4. Oblicz miary tych kątów. Czy ten pięciokąt jest wypukły?

7.51. Kąt zewnętrzny wielokąta foremnego jest równy 18°. Ile przekątnych ma ten wielokąt?

7.52. W jakim wielokącie wypukłym stosunek sumy miar kątów wewnętrznych do sumy miar wszystkich kątów zewnętrznych jest równy:

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{4}$?

7.53. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów, $n \geq 3$, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Wyznacz n, wiedząc, że liczba wszystkich odcinków łączących te punkty jest równa:

a) 21 b) 45 c) 55 d) 78.

7.54. Różnica liczby boków dwóch wielokątów jest równa 1, a różnica liczby przekątnych tych wielokątów jest równa 16. Jakie to wielokąty?

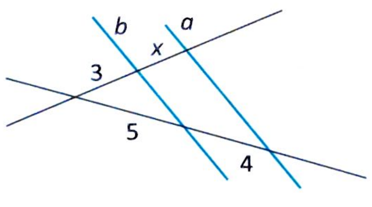
7.55. Czy istnieje dziewięciokąt wypukły, który ma cztery kąty proste? Odpowiedź uzasadnij.

7.56. Ile, co najwyżej, kątów ostrych może mieć dowolny wielokąt wypukły?

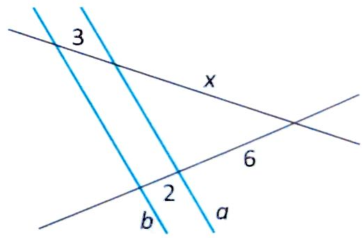
Twierdzenie Talesa

7.57. Na rysunkach poniżej proste a i b są równoległe. Oblicz x.

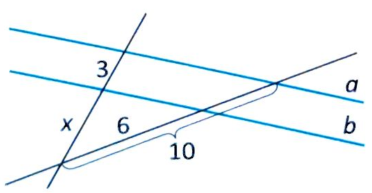
a)



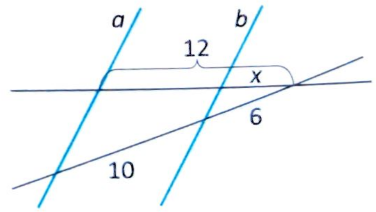
b)



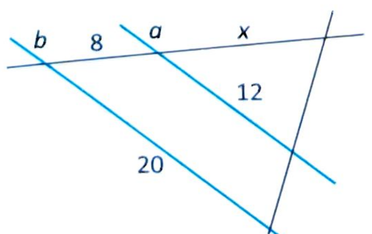
c)



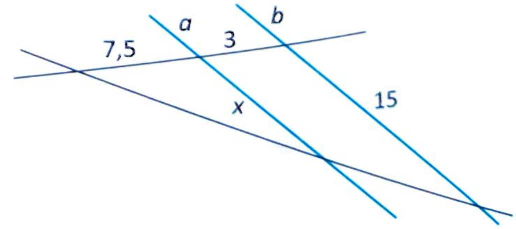
d)



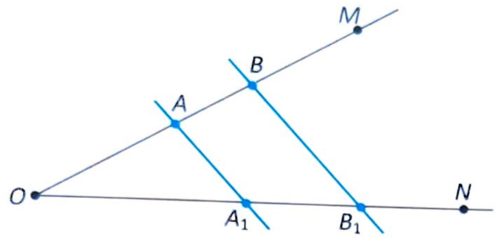
e)



f)



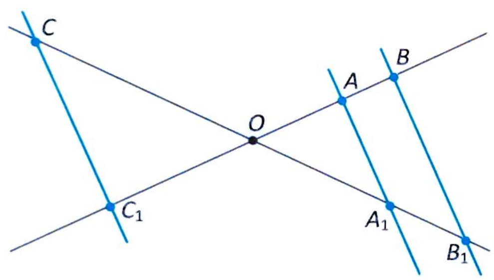
7.58. Ramiona kąta MON przecięto prostymi równoległymi AA_1 i BB_1, jak na rysunku poniżej:



Oblicz:

a) $|AB|$, jeśli $|OA| = 17$ cm, $|OA_1| = 2$ dm, $|OB_1| = 49$ cm
b) $|OA|$, jeśli $|OB| = 10{,}5$ cm, $|OA_1| = 38$ mm, $|A_1B_1| = 0{,}95$ dm
c) $|OB_1|$, jeśli $|OA| = 16$ cm, $|AB| = 4{,}8$ dm, $|A_1B_1| = 0{,}4$ m
d) $|A_1B_1|$, jeśli $|OA| = 6{,}3$ cm, $|AB| = 8{,}7$ cm, $|OB_1| = 22{,}5$ cm.

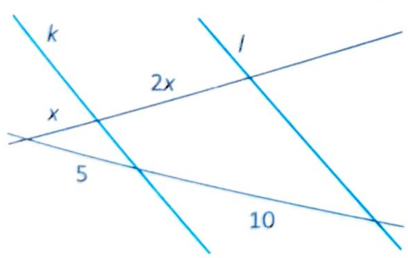
7.59. Proste AB i A_1B_1 przecięto prostymi równoległymi AA_1, BB_1 i CC_1, jak na rysunku poniżej:

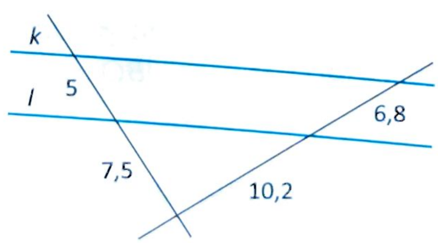


Oblicz:

a) $|CC_1|$, jeśli $|C_1O| = 4$ cm, $|OA| = 3$ cm, $|AA_1| = 2$ cm
b) $|OC_1|$, jeśli $|OA_1| = 1{,}8$ dm, $|AC_1| = 11{,}2$ dm, $|OC| = 5{,}4$ dm
c) $|OB|$, jeśli $|CC_1| = 4$ dm, $|BB_1| = 56$ cm, $|C_1B| = 1{,}2$ m
d) $|CA_1|$, jeśli $|AA_1| = 2$ cm, $|BB_1| = 5$ cm, $|A_1B_1| = 4{,}5$ cm, $|CC_1| = 4$ cm.

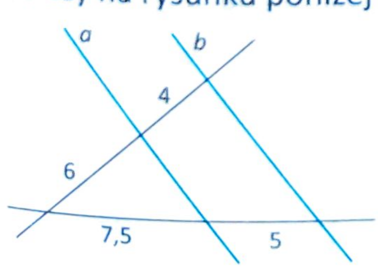
D **7.60.** Wykaż, że proste k i l na rysunku poniżej są równoległe.



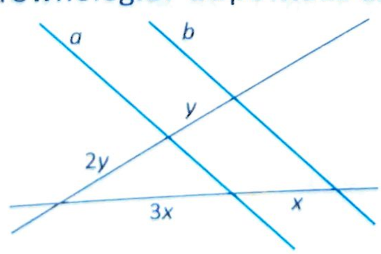


7.61. Czy na rysunku poniżej proste a i b są równoległe? Odpowiedź uzasadnij.

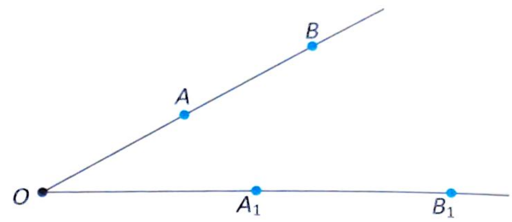
a)



b)



7.62. Na jednym z ramion kąta o wierzchołku O leżą punkty A i B, a na drugim ramieniu – punkty A_1 i B_1 (patrz rysunek poniżej).



Czy proste AA_1 i BB_1 są równoległe, jeśli:

a) $|OA| = 4{,}2$ dm, $|AB| = 2$ dm, $|OA_1| = 6{,}3$ dm, $|OB_1| = 9{,}3$ dm

b) $|OA| = 6{,}8$ cm, $|OB| = 22{,}8$ cm, $|OB_1| = 28{,}5$ cm, $|A_1B_1| = 20$ cm?

7.63. Dane są odcinki, których długości są równe a i b, $a > b$. Skonstruuj odcinek, którego długość będzie równa:

a) $\frac{1}{5}a$ b) $\frac{2b}{3}$ c) $\frac{3(a+b)}{7}$

d) $\frac{b^2}{a}$ e) $\frac{ab}{a-b}$ f) $\frac{a^2}{a+b}$.

7.64. W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane: $|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

7.65. W trapezie $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, przedłużono ramiona AD i BC do przecięcia się w punkcie E. Oblicz CE, jeśli $|AD| = 1$ dm, $|BC| = 1{,}5$ dm, $|DE| = 2$ dm.

7.66. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt K tak, że $\frac{|CK|}{|AK|} = \frac{3}{4}$. Przez punkt K poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Przecięła ona bok BC trójkąta w punkcie L. Oblicz $|BL|$ i $|LC|$, jeśli $|BC| = 49$ cm.

7.67. Na boku AC trójkąta ABC obrano punkt M tak, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{5}{7}$. Przez punkt M poprowadzono prostą, równoległą do boku AB trójkąta, która przecięła bok BC w punkcie N. Wiedząc, że $|AC| = 24$ cm i $|AB| = 20$ cm, oblicz $|MN|$ oraz $\frac{|CN|}{|CB|}$.

Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie

7.68. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest o 26° większy od drugiego.

D **7.69.** Suma dwóch kątów trójkąta jest równa trzeciemu kątowi. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

7.70. Znajdź kąty trójkąta równoramiennego, w którym kąt przy podstawie jest pięć razy mniejszy od przyległego do niego kąta zewnętrznego.

7.71. W równoległoboku $ABCD$ dwusieczna DE kąta rozwartego ADC i prosta BC wyznaczają dwa kąty przyległe, których miary pozostają w stosunku $2 : 3$. Oblicz miary kątów równoległoboku $ABCD$.

7.72. W trójkącie równoramiennym jeden z boków ma długość 4 cm, a drugi 9 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.73. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AC. Ramię AB przedłużono na zewnątrz trójkąta o odległość BD i punkt D połączono z punktem C. Oblicz długość AC, jeżeli obwód trójkąta CBD wynosi 24 cm, a obwód trójkąta ADC wynosi 39 cm.

7.74. Czy można zbudować trójkąt o bokach mających długość:

a) $2, 4, 6$ b) $2-\sqrt{2}, 5, 2+\sqrt{2}$ c) $10, 12, 14$?

7.75. Wyznacz wszystkie wartości a, dla których boki pewnego trójkąta mają długość:

a) $3, a+2, 5-a$ b) $a, 2a, 6$ c) $a, 6-a, 3a+4$.

7.76. Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną.

7.77. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 5 i 7. Trzeci bok leży naprzeciw najmniejszego kąta w tym trójkącie. Wyznacz długość trzeciego boku wiedząc, że wyraża się ona liczbą naturalną.

7.78. Dwa boki trójkąta różnobocznego mają długość 3 i 7. Trzeci bok leży naprzeciw największego kąta w tym trójkącie. Wyznacz długość trzeciego boku wiedząc, że wyraża się ona liczbą naturalną.

7.79. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 11$ cm, $|AC| = 12$ cm. Połączono środki boków tego trójkąta, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.80. Obwód trójkąta ABC wynosi 27 cm. Połączono środki boków tego trójkąta i otrzymano trójkąt $A_1B_1C_1$. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.81. W trójkącie ABC połączono środki boków, otrzymując trójkąt $A_1B_1C_1$. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest o 20 cm mniejszy od obwodu trójkąta ABC. Oblicz obwód trójkąta ABC.

D **7.82.** W trójkącie ABC połączono środki boków i otrzymano trójkąt KLM. Wykaż, że kąty trójkąta KLM mają takie same miary, jak kąty trójkąta ABC.

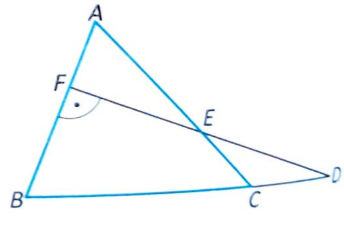
D **7.83.** Wykaż, że jeżeli kąt przyległy do jednego z kątów trójkąta jest dwa razy większy od drugiego kąta tego trójkąta, to trójkąt jest równoramienny.

D **7.84.** W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i zaznaczono na przedłużeniach punkty D i E tak, że $|AD| = |AC|$ oraz $|BE| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle DCE| = 135°$.

D **7.85.** Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zaznaczono punkty C_1 i C_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = 45°$.

D **7.86.** Wykaż, że jeśli w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie dzieli dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, to kąty danego trójkąta są równe: 36°, 72°, 72°.

D **7.87.** W trójkącie ABC na rysunku obok boki AC i BC są równe. Punkty B, C, D są współliniowe oraz $DF \perp AB$. Wykaż, że trójkąt CDE jest równoramienny.



D **7.88.** W trójkącie ABC bok AB jest najdłuższy. Na boku AB odłożono odcinki AC_1 oraz BC_2 w taki sposób, że $|AC_1| = |AC|$ oraz $|BC_2| = |BC|$. Wykaż, że $|\sphericalangle C_1CC_2| = \frac{|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B|}{2}$.

D **7.89.** Wewnątrz trójkąta ABC wybrano dowolny punkt S. Uzasadnij, że $|\sphericalangle CSB| > |\sphericalangle CAB|$.

D **7.90.** W trójkącie ABC prowadzimy dwusieczne kątów B i C, które przecinają się w punkcie S. Wykaż, że trójkąt CBS jest rozwartokątny.

D **7.91.** Udowodnij, że w każdym trójkącie jest kąt, który ma co najmniej 60°, i kąt, który ma co najwyżej 60°.

7.92. Narysuj dowolny trójkąt ABC i wykreśl przy dwóch jego wierzchołkach po jednym kącie zewnętrznym. Czy suma tych dwóch kątów może równać się kątowi półpełnemu? Odpowiedź uzasadnij.

D **7.93.** Dany jest kąt ostry o wierzchołku O i punkt A leżący na ramieniu tego kąta, $A \neq O$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste: prostą k prostopadłą do ramienia $OA^{\rightarrow}$, która przecięła drugie ramię kąta w punkcie B, oraz prostą m, prostopadłą do drugiego ramienia, która przecięła to ramię w punkcie C. Dwusieczna kąta ostrego BAC przecięła odcinek BC w punkcie D. Wykaż, że $|OA| = |OD|$.

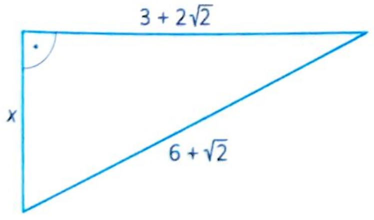
D **7.94.** Punkt X jest dowolnym punktem leżącym wewnątrz równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że $|AX| < |BX| + |CX| + |DX|$.

D **7.95.** Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków danego czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta.

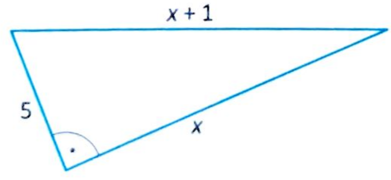
Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

7.96. Oblicz x:

a)

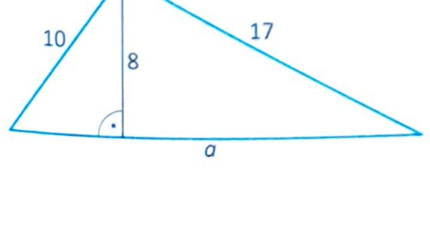


b)

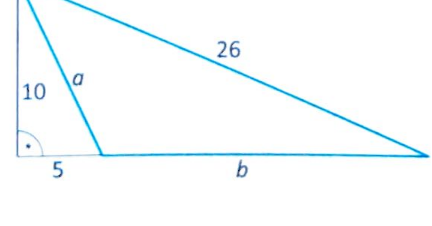


7.97. Oblicz długości nieznanych odcinków na rysunkach poniżej:

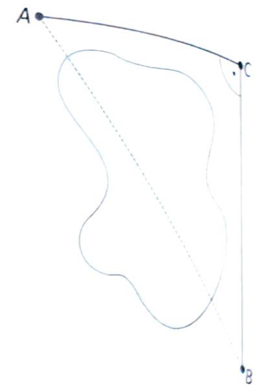
a)



b)



7.98. Miejscowości A, B i C są położone nad tym samym jeziorem – jak pokazano na rysunku obok. Z miejscowości A do C prowadzi droga długości 2,7 km, a droga z miejscowości C do B jest o 900 m dłuższa. O ile krótsza jest odległość w linii prostej od A do B od drogi prowadzącej przez C?



7.99. Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu, mierzonej w calach (1 cal = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.

7.100. Punkt P należy do dwusiecznej kąta prostego i leży w odległości 2 cm od obu ramion tego kąta. Jaka jest odległość tego punktu od wierzchołka kąta?

7.101. Punkt M leży na symetralnej odcinka AB, w odległości 11 cm od odcinka AB i 61 cm od końców tego odcinka. Oblicz długość odcinka AB.

7.102. W trójkącie prostokątnym średni bok jest krótszy od najdłuższego o 2 cm. Wiedząc, że najkrótszy bok ma długość 8 cm, oblicz długość pozostałych boków trójkąta.

7.103. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 10 cm, a dwa jego krótsze boki pozostają w stosunku 8 : 15. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

7.104. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny:

a) 1,6 dm; 1,2 dm; 1 dm b) 4 dm; 85 cm; 75 cm

c) $\sqrt{2}$ cm; $\sqrt{3}$ cm; $\sqrt{5}$ cm d) 1 m; 5 dm; 1,25 m.

7.105. W prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość 10 cm, a bok BC ma 4 cm. Na boku DC obrano punkt E tak, że $|DE| : |EC| = 1 : 4$. Czy trójkąt ABE jest prostokątny? Odpowiedź uzasadnij.

7.106. Dane są odcinki o długościach a i b, $a > b$. Skonstruuj odcinek, którego długość jest równa:

a) $a\sqrt{2}$ b) $b\sqrt{12}$ c) $0{,}5\sqrt{a^2+b^2}$ d) $\frac{1}{3}\sqrt{a^2-b^2}$.

7.107. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny:

a) 4 cm, 5 cm, 6 cm
b) 10 cm, 7 cm, 7 cm
c) $2\sqrt{3}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm, $10\sqrt{0,36}$ cm
d) $\left(2\sqrt{2}+1\right)$ cm, $\left(2\sqrt{2}-1\right)$ cm, $2\sqrt{2}$ cm.

7.108. Sprawdź, czy dany trójkąt jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny, jeśli długości jego boków pozostają w stosunku:

a) $4:3:5$
b) $2:3:4$
c) $2:1:\sqrt{5}$
d) $\sqrt{10}:\sqrt{6}:\sqrt{5}$.

Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

7.109. Obwód trójkąta ABC wynosi 21 cm. Wysokość CD dzieli go na dwa trójkąty, których obwody wynoszą odpowiednio 12 cm i 15 cm. Oblicz wysokość CD.

7.110. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość:

a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{6}$
c) 15
d) $\sqrt{2}$.

7.111. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego wiedząc, że jest on o 1 dłuższy od wysokości tego trójkąta. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi.

7.112. Oblicz długość boku trójkąta prostokątnego równoramiennego wiedząc, że najkrótsza wysokość tego trójkąta jest o 1 krótsza od pozostałych wysokości. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi.

7.113. W trójkącie prostokątnym wysokości mają długość: 12 cm, 15 cm, 20 cm. Jaką długość mają odcinki, na które spodek wysokości, poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego, podzielił przeciwprostokątną?

7.114. W trójkącie prostokątnym poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Spodek wysokości podzielił przeciwprostokątną na odcinki długości a i b. Oblicz tę wysokość.

a) $a=5$ cm $\quad b=2$ dm
b) $a=0,2$ dm $\quad b=1\frac{1}{4}$ dm
c) $a=\sqrt{2}$ cm $\quad b=\sqrt{18}$ cm
d) $a=2\sqrt{3\frac{1}{16}}$ dm $\quad b=1,4$ m

7.115. W trójkącie równoramiennym o obwodzie 32 cm wysokość poprowadzona na podstawę jest równa 8 cm. Oblicz długość boków tego trójkąta.

7.116. Oblicz miary kątów trójkąta prostokątnego *ABC*, wiedząc, że środkowa i wysokość poprowadzone z wierzchołka *C* dzielą kąt prosty *C* na trzy równe części.

7.117. W trójkącie prostokątnym równoramiennym przyprostokątna ma długość 4. Oblicz długość środkowych tego trójkąta.

7.118. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Oblicz różnicę długości środkowej i wysokości tego trójkąta, poprowadzonych z wierzchołka kąta prostego.

7.119. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 16 cm i 12 cm. Oblicz odległość środka ciężkości tego trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

7.120. W trójkącie równoramiennym boki mają długość 13 cm, 13 cm, 10 cm. Oblicz długość środkowych w tym trójkącie.

7.121. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm. Środek ciężkości tego trójkąta znajduje się w odległości $2\frac{2}{3}$ cm od podstawy. Oblicz obwód danego trójkąta.

D **7.122.** W trójkącie *ABC* poprowadzono wysokości *BD* i *CE*. Wykaż, że miary kątów *ABD* i *ACE* są równe.

D **7.123.** Wykaż, że jeżeli jedna z wysokości trójkąta jest jednocześnie środkową tego trójkąta, to ten trójkąt jest równoramienny.

D **7.124.** W trójkącie *ABC* na wysokości *CD* wybrano punkt *H* taki, że $|\sphericalangle AHD| = |\sphericalangle ABC|$. Wykaż, że proste *AH* i *BC* są prostopadłe.

D **7.125.** Udowodnij, że jeżeli środkowa trójkąta równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.

D **7.126.** W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę α, zaś kąt przy wierzchołku *B* – miarę β, przy czym $\alpha < \beta$. Wykaż, że kąt między wysokością poprowadzoną z wierzchołka *C* i dwusieczną kąta przy wierzchołku *C* jest równy $\frac{\beta - \alpha}{2}$. Rozważ trzy przypadki, gdy kąt przy wierzchołku *B* jest kątem ostrym, prostym lub rozwartym.

7.127. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 14$ cm, $|AC| = 15$ cm. Niech D oznacza spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Oblicz $|CD|$.

7.128. W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta jest równa a. Wyznacz wysokość opuszczoną na podstawę.

7.129. W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD. Wierzchołek A połączono odcinkiem ze środkiem E środkowej CD i przedłużono go aż do przecięcia w punkcie F z bokiem CB. Oblicz $\frac{|CF|}{|FB|}$.

D **7.130.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie ABC prawdziwa jest podwójna nierówność

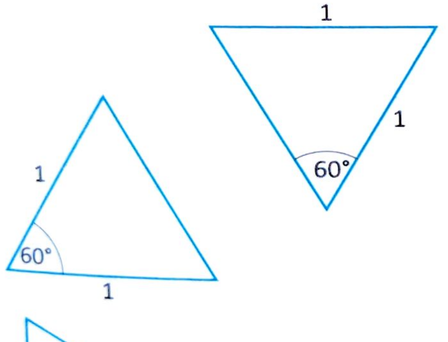
$$\frac{3(a+b+c)}{4} < s_a + s_b + s_c < a + b + c,$$

gdzie a, b, c oznaczają długości odpowiednich boków trójkąta, s_a, s_b, s_c – długości środkowych poprowadzonych odpowiednio do boków o długościach a, b, c.

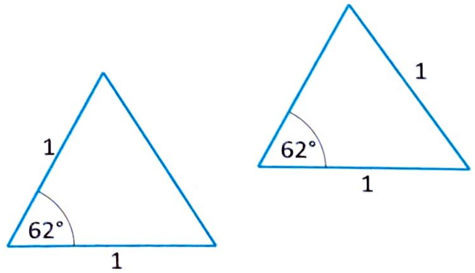
Przystawanie trójkątów

7.131. Czy trójkąty w poniższych parach są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

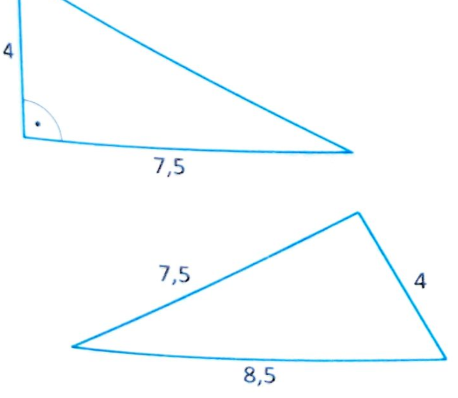
a)



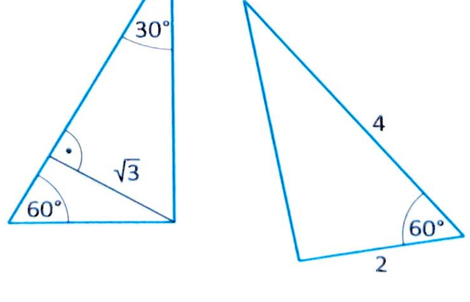
b)



c)



d)



D 7.132. Udowodnij, że dwa trójkąty prostokątne są przystające, jeżeli przyprostokątna i przeciwległy jej kąt ostry jednego trójkąta równają się przyprostokątnej i przeciwległemu kątowi ostremu drugiego trójkąta.

D 7.133. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne BD i B_1D_1. Wykaż, że jeśli $|BC| = |B_1C_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|BD| = |B_1D_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

D 7.134. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono środkowe BD i B_1D_1. Wykaż, że jeżeli $|BD| = |B_1D_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$ oraz $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle D_1B_1C_1|$, to $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

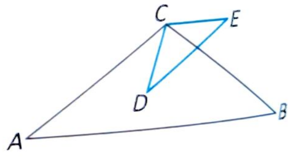
D 7.135. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono dwusieczne CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, wiedząc, że $|CD| = |C_1D_1|$, $|DA| = |D_1A_1|$ oraz $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle C_1D_1A_1|$.

D 7.136. W trójkątach ostrokątnych ABC i $A_1B_1C_1$ poprowadzono wysokości CD i C_1D_1. Wykaż, że $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, jeżeli $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle A_1|$, $|\sphericalangle B| = |\sphericalangle B_1|$ i $|CD| = |C_1D_1|$.

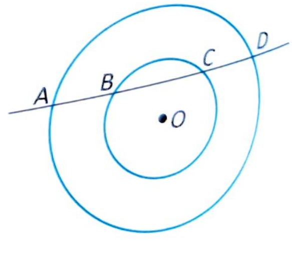
D 7.137. Na jednej z dwóch prostych przecinających się w punkcie O zaznaczamy punkty A, B w taki sposób, że punkt O jest środkiem odcinka AB. Na drugiej prostej zaznaczamy punkty C, D w taki sposób, że punkt O jest również środkiem odcinka CD. Wykaż, że pr. $AC \parallel$ pr. BD.

D 7.138. W trójkącie równobocznym o boku a przedłużono bok AC poza punkt A o odcinek AA_1, $|AA_1| = 1$, bok AB poza punkt B o odcinek BB_1, $|BB_1| = 1$, bok BC poza punkt C o odcinek CC_1, $|CC_1| = 1$. Udowodnij, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest równoboczny.

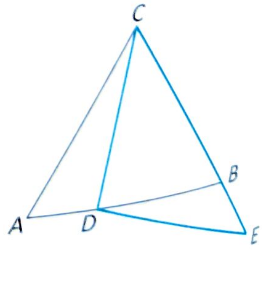
D 7.139. Trójkąty ABC i CDE są równoramienne, $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CE|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE|$. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



D 7.140. Prosta przecina dwa okręgi współśrodkowe odpowiednio w punktach A, D i B, C, jak na rysunku obok. Wykaż, że $|AB| = |CD|$.



D 7.141. Punkt D należy do boku AB trójkąta równobocznego ABC (zobacz rysunek obok). Bok CB przedłużono poza punkt B do punktu E. Wykaż, że jeśli $|BE| = |AD|$, to trójkąt CDE jest równoramienny.



D **7.142.** Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC zaznaczono odpowiednio punkty E, F, D tak, że $|AE| = |BF| = |CD| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że trójkąt EFD jest równoboczny oraz że boki tego trójkąta są prostopadłe do boków trójkąta ABC.

7.143. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty P, Q, R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym punkcie na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC.

D a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.

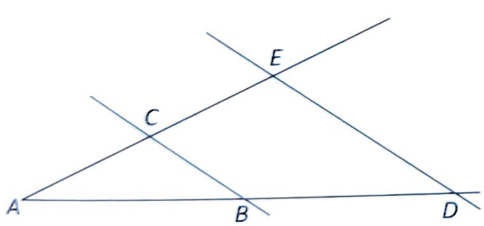
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

D **7.144.** Na bokach trójkąta równobocznego ABC odkładamy odcinki równej długości: AD na boku AB, BE na boku BC i CF na boku CA. Następnie prowadzimy odcinki AE, BF i CD. Wykaż, że punkty przecięcia tych odcinków wyznaczają trójkąt równoboczny.

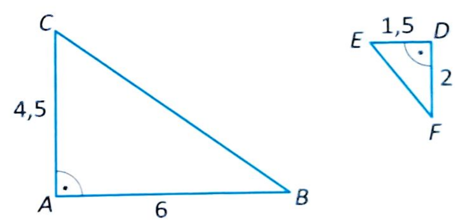
Podobieństwo trójkątów

7.145. Czy dane trójkąty są podobne? Odpowiedź uzasadnij.

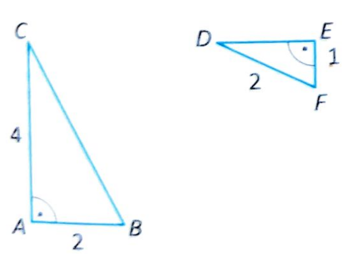
a) ΔABC i ΔADE, jeśli $ED \parallel CB$



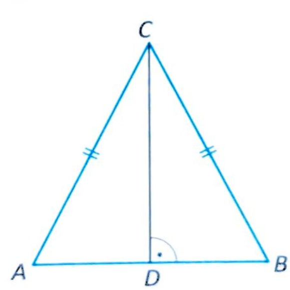
b) ΔABC i ΔDEF



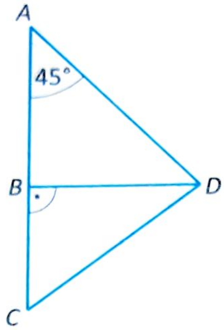
c) ΔABC i ΔDEF



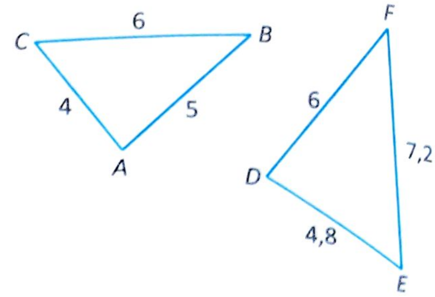
d) ΔADC i ΔBDC



e) ΔABD i ΔBCD, jeśli $|AB| \neq |BC|$

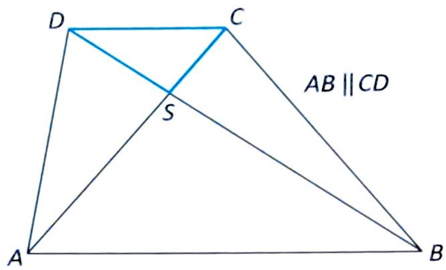


f) ΔABC i ΔDEF

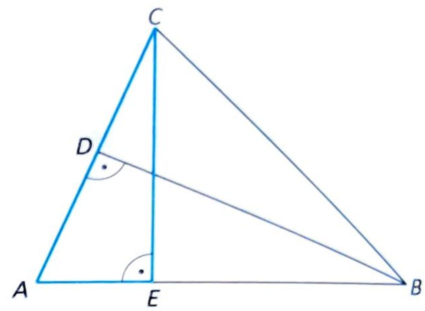


7.146. Wykaż podobieństwo wskazanych trójkątów.

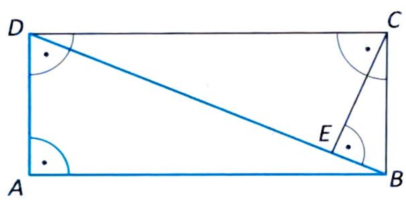
a) ΔABS i ΔCDS



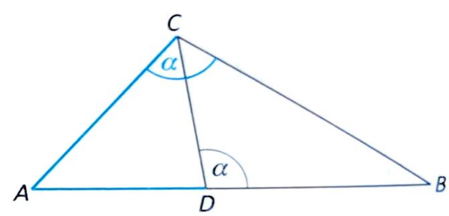
b) ΔABD i ΔAEC



c) ΔABD i ΔDEC

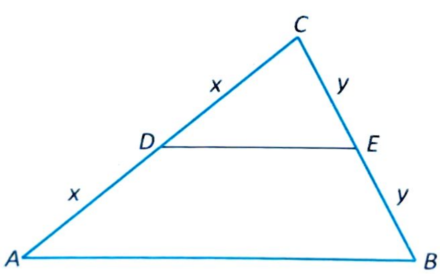


d) ΔABC i ΔCDB

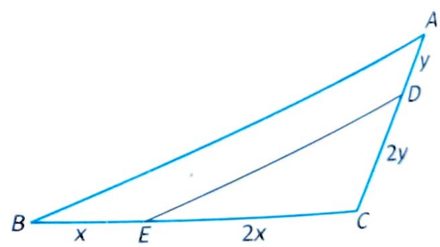


7.147. Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do wskazanego poniżej trójkąta i podaj skalę tego podobieństwa.

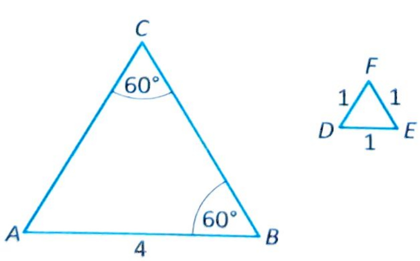
a) ΔDEC



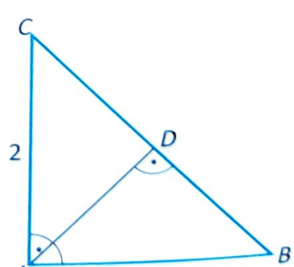
b) ΔDEC



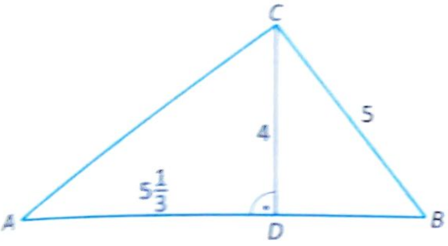
c) ΔDEF



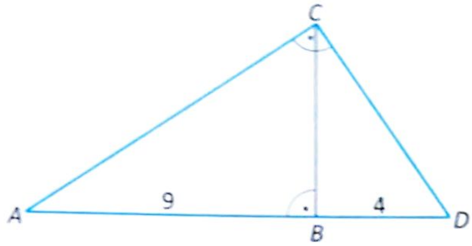
d) ΔABD



e) ΔCDB

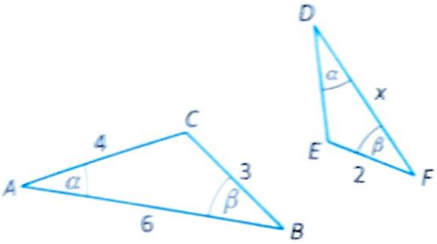


f) ΔADC

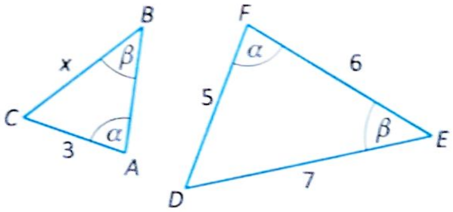


7.148. Na rysunku poniżej trójkąty ABC i DEF są podobne. Wyznacz długość x.

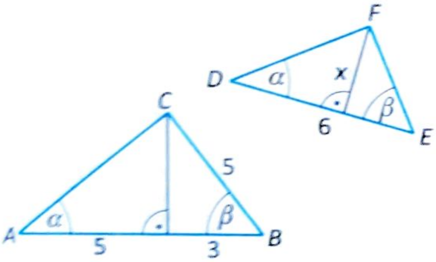
a)



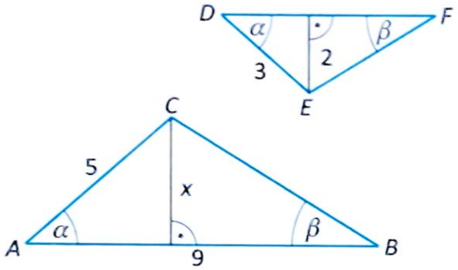
b)



c)



d)



7.149. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość $|CA| = 5{,}5$ cm, $|CB| = 30$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC, a $|A_1B_1| = 122$ cm. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

7.150. Obwód trójkąta ABC jest równy 9 cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $k = 4$, a dwa jego boki mają długość: $|A_1B_1| = 10$ cm, $|A_1C_1| = 12$ cm. Oblicz długość boków trójkąta ABC.

Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

7.151. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|AC| = 12$ cm. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC i jego obwód jest równy 6 cm. Oblicz:

a) skalę podobieństwa trójkąta $A_1B_1C_1$ do trójkąta ABC

b) długości boków trójkąta $A_1B_1C_1$.

7.152. Obwód trójkąta ABC podobnego do trójkąta $A_1B_1C_1$ jest równy 14 cm. Wiedząc, że: $|A_1B_1| = 2$ cm, $|B_1C_1| = 3\frac{1}{3}$ cm oraz $|A_1C_1| = 4$ cm, oblicz:

a) skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta $A_1B_1C_1$

b) długości boków trójkąta ABC.

7.153. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC w skali s. Wiedząc, że obwód trójkąta ABC jest o 60% krótszy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$, oblicz:

a) skalę s

b) o ile procent obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ jest dłuższy od obwodu trójkąta ABC.

7.154. Obwód trójkąta ABC jest równy 21 cm. Prosta równoległa do podstawy AB przecina wysokość CD w punkcie P, a boki AC i BC – odpowiednio w punktach E i F. Wiedząc, że $|DP| : |PC| = 1 : 2$, oblicz obwód trójkąta CEF.

7.155. W trójkącie prostokątnym ABC, w którym $|\sphericalangle C| = 90^\circ$, $|AB| = 51$ cm, $|BC| = 24$ cm, poprowadzono odcinek DE długości 15 cm, równoległy do boku AC taki, że $E \in BC$ i $D \in AB$. Oblicz długości odcinków CE i AD.

7.156. W trapezie długości podstaw wynoszą 5 cm i 8 cm, a długości ramion: 3 cm i 4 cm. Ramiona trapezu przedłużono do przecięcia w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta, którego jednym z wierzchołków jest punkt P, a dwa pozostałe są końcami dłuższej podstawy trapezu.

7.157. W trapezie podstawy mają długość 10 cm i 4 cm, a wysokość jest równa 7 cm. Wyznacz odległości punktu przecięcia się przekątnych trapezu od podstaw.

7.158. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $|AD| = 4$ cm i $|DB| = 10$ cm. Bok BC ma 16 cm długości. Wyznacz długości odcinków, na jakie symetralna boku AB podzieli bok BC.

7.159. W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm. Na boku AC zaznaczono punkt D, a na boku BC punkt E w taki sposób, że $|DC| = 2$ cm, $|CE| = 3$ cm. Wiedząc, że $|DE| = 4$ cm, oblicz długość odcinka AB.

7.160. Boki trójkąta rozwartokątnego ABC mają długość: $|AB| = 10$, $|BC| = 8$, $|AC| = 5$. Na boku AB zaznaczono punkt D w taki sposób, że $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle ACB|$. Oblicz długości odcinków CD i DB.

7.161. Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 20 cm. Spodek najkrótszej wysokości dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki w stosunku 9 : 16. Wyznacz długości boków tego trójkąta.

7.162. Wysokość trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki, z których jeden jest o 2 krótszy od tej wysokości, a drugi o 3 od niej dłuższy. Oblicz długość przeciwprostokątnej.

7.163. W trójkącie równoramiennym ABC są dane: $|AC| = |BC| = 26$ cm, $|AB| = 20$ cm. Oblicz odległość środka S wysokości CD od ramienia AC.

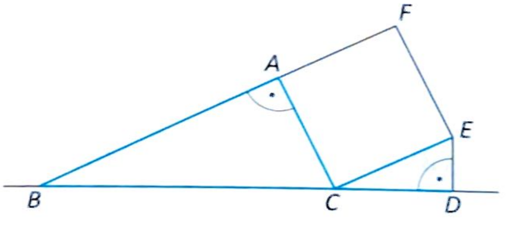
7.164. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 8$ cm i $|AC| = 4$ cm. Punkt D dzieli bok AB w stosunku $|AD| : |DB| = 1 : 3$. Punkt E należy do boku BC i odcinek DE jest prostopadły do boku BC. Oblicz $|CE| : |EB|$.

7.165. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 30 cm, a ramię 25 cm. Oblicz odległość środka podstawy od ramienia tego trójkąta.

7.166. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 6 cm, a wysokość CD ma 12 cm. W trójkąt ten wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do ramion AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

7.167. Podstawa AB trójkąta ostrokątnego ABC ma długość 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość 8 cm. W ten trójkąt wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do podstawy AB, a dwa – do boków AC i BC. Oblicz długość boku kwadratu.

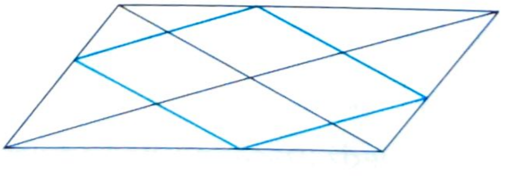
7.168. Na rysunku obok punkty B, C, D są współliniowe. Trójkąty BCA i CDE są prostokątne, a czworokąt $ACEF$ jest kwadratem.



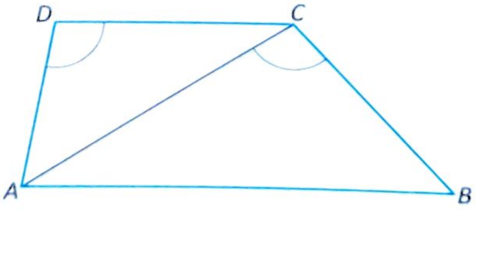
D a) Wykaż, że trójkąty ABC i CDE są podobne.

b) Wiedząc dodatkowo, że $|AC| : |AB| = 3 : 4$, oblicz skalę podobieństwa trójkąta CDE do trójkąta ABC.

D 7.169. W równoległobok o przekątnych a i b, $a \neq b$, wpisano romb tak, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku (zobacz rysunek obok). Wykaż, że długość boku rombu jest równa $\frac{ab}{a+b}$.



7.170. Czworokąt $ABCD$ na rysunku obok jest trapezem, $AB \parallel DC$, oraz $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ACB|$. Wiedząc, że $|AD| = 5$, $|DC| = 6$ oraz $|BC| = 6\frac{2}{3}$, oblicz długość podstawy AB.



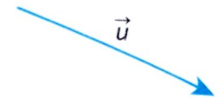
7.171. W trójkącie równobocznym ABC wysokości AE i CD przecinają się w punkcie O.

D a) Wykaż, że trójkąt ODE jest podobny do trójkąta ADE. Oblicz skalę tego podobieństwa.

b) Wiedząc dodatkowo, że obwód trójkąta ODE wynosi 2, oblicz długość boku trójkąta ABC. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{Z}$ i $c>0$.

Wektor na płaszczyźnie

7.172. Dany jest wektor $\vec{u}$.



Narysuj wektor $\vec{v}$ taki, że:

a) $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$ b) $\vec{v} = -2\vec{u}$ c) $\vec{v} = 3\vec{u}$ d) $\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$

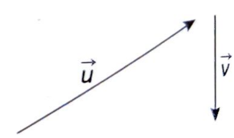
7.173. Dane są wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (patrz rysunek obok). Narysuj wektory:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ oraz $\vec{v} + \vec{u}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$ oraz $\vec{v} - \vec{u}$

c) $2\vec{u} - 2\vec{v}$ oraz $2\left(\vec{u} - \vec{v}\right)$

d) $\frac{3}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$ oraz $\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$.



7.174. Między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ prawdziwa jest zależność $\vec{u} = -0{,}5 \cdot \vec{v}$. Czy prawdziwa jest równość:

a) $|\vec{v}| = 2|\vec{u}|$ b) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$?

Odpowiedź uzasadnij, wykonując rysunki odpowiednich wektorów.

7.175. W prostokącie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku DC, zaś punkt F jest środkiem boku BC. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$, wyznacz wektory $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ oraz $\overrightarrow{FE}$ w zależności od wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

7.176. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ dane są wektory: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Wyraź w zależności od $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektory: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}$.

D **7.177.** Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Wykaż, że $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

D **7.178.** Dany jest równoległobok $ABCD$. Wykaż, że wektor $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{AD}$ i dwa razy od niego dłuższy.

7.179. Punkt K dzieli bok AC trójkąta ABC na odcinki AK i KC, dla których $|AK| : |KC| = 2 : 3$. Punkt L dzieli bok BC na odcinki BL i LC tak, że $|BL| : |LC| = 2 : 3$. Wykaż – korzystając z działań na wektorach – że $KL \parallel AB$ i wyznacz długość odcinka KL w zależności od długości odcinka AB.

D **7.180.** Korzystając z własności wektorów wykaż, że jeśli boki AB, DC czworokąta są równoległe i mają taką samą długość, to również boki AD i BC są równoległe i mają taką samą długość.

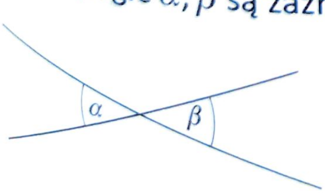
D **7.181.** W dowolnym czworokącie wypukłym łączymy kolejno środki jego boków. Korzystając z własności wektorów wykaż, że powstały czworokąt jest równoległobokiem.

D **7.182.** Na płaszczyźnie dane są niewspółliniowe punkty A, B, C, D oraz dowolny punkt M. Wykaż, że jeśli $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

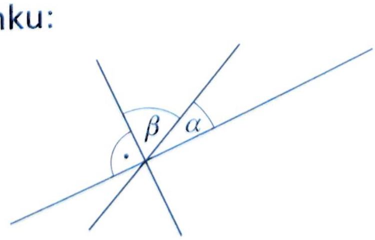
Test sprawdzający do rozdziału 7.

1. Kąty przyległe α, β są zaznaczone na rysunku:

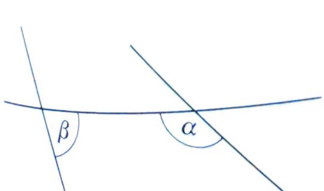
A.



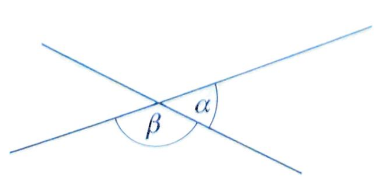
B.



C.



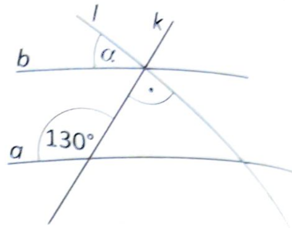
D.



2. Figurą wypukłą i nieograniczoną jest:

A. odcinek B. koło C. okrąg D. kąt o mierze 175°

3. Na rysunku obok proste *a* i *b* są równoległe, zaś prosta *k* jest prostopadła do prostej *l*.



Zatem:

A. $\alpha = 35^\circ$ B. $\alpha = 40^\circ$

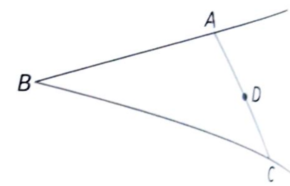
C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 50^\circ$

4. Punkt *C* dzieli odcinek *AB* długości 48 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy $|AC| : |BC| = 3 : 5$. Z tego wynika, że:

A. $|AC| = 30$ cm i $|BC| = 18$ cm B. $|AC| = 20$ cm i $|BC| = 28$ cm

C. $|AC| = 18$ cm i $|BC| = 30$ cm D. $|AC| = 28$ cm i $|BC| = 20$ cm

5. Na rysunku obok $|BA| < |CB|$ oraz $|AD| = |DC|$.



Prawdziwe jest zdanie:

A. Prosta *BD* nie jest symetralną odcinka *AC* i półprosta $\overrightarrow{BD}$ nie jest dwusieczną kąta *ABC*.

B. Prosta *BD* nie jest symetralną odcinka *AC* i półprosta $\overrightarrow{BD}$ jest dwusieczną kąta *ABC*.

C. Prosta *BD* jest symetralną odcinka *AC* i półprosta $\overrightarrow{BD}$ jest dwusieczną kąta *ABC*.

D. Prosta *BD* jest symetralną odcinka *AC* i półprosta $\overrightarrow{BD}$ nie jest dwusieczną kąta *ABC*.

6. Dany jest odcinek *AB* oraz punkty C_1, C_2, C_3, spełniające warunki:

$|C_1A| = 5{,}5$ cm $|C_2A| = 3{,}(7)$ cm $|C_3A| = \sqrt{18}$ cm

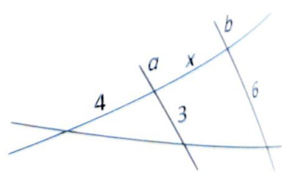
$|C_1B| = \left(\frac{2}{11}\right)^{-1}$ cm $|C_2B| = 3\frac{7}{9}$ cm $|C_3B| = 3\sqrt{2}$ cm.

Do symetralnej odcinka *AB* spośród punktów C_1, C_2, C_3:

A. należy tylko punkt C_1 B. należą tylko punkty C_1 i C_2

C. nie należy żaden punkt D. należą wszystkie punkty

7. Na rysunku obok proste *a* i *b* są równoległe. Zatem:



A. $x = 2$ B. $x = 4$

C. $x = 6$ D. $x = 8$

8. Dwa boki trójkąta mają długość 4 oraz $5\frac{1}{2}$, a obwód tego trójkąta jest liczbą naturalną. Trzeci bok tego trójkąta może mieć maksymalnie długość równą:

A. 9 B. 8,5 C. 7,5 D. 5,5

9. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 1 cm krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna ma 5 cm długości. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość:

A. 5 cm B. 10 cm C. 13 cm D. 15 cm

10. W pewnym trójkącie dwusieczna tylko jednego kąta zawiera wysokość tego trójkąta. Zatem trójkąt ten jest:

A. rozwartokątny B. prostokątny C. równoramienny D. równoboczny

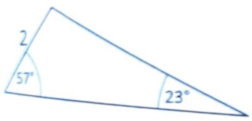
11. W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość a. Długość przeciwprostokątnej jest równa:

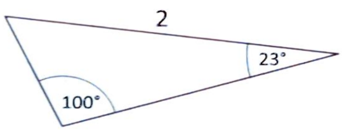
A. $2a$ B. $\sqrt{2}a$ C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ D. a

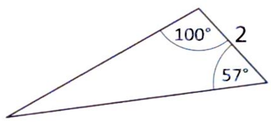
12. W trójkącie o bokach długości 4, 5, 6 połączono środki boków i otrzymano w ten sposób nowy trójkąt. Obwód nowego trójkąta jest równy:

A. 5,5 B. 6,5 C. 7,5 D. 8,5

13. Dane są trzy trójkąty:

I.


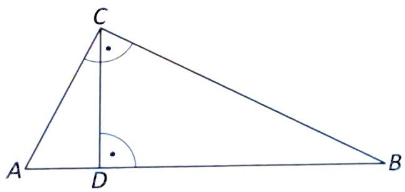
II.


III.


Trójkąty przystające są na rysunkach:

A. tylko na I i II B. tylko na II i III C. tylko na I i III D. na I, II i III

14. W trójkącie ABC na rysunku obok $|AD| = 1\frac{1}{5}$ cm, $|DB| = 7,5$ cm.



Odcinek CD ma długość:

A. 2 cm B. 3 cm
C. 4 cm D. 5 cm

15. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono dwie wysokości CD i AE. Wiadomo, że $|DB| = 2,5$ cm, $|CD| = 5$ cm oraz $|AE| = 4$ cm. Wówczas:

A. $|EB| = 2$ cm B. $|EB| = 2\frac{1}{4}$ cm C. $|EB| = 3$ cm D. $|EB| = 3\frac{1}{8}$ cm

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

16. Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego jest większy o 36° od kąta zewnętrznego przy jego wierzchołku naprzeciw podstawy. Wyznacz kąty tego trójkąta.

17. W równoległoboku *ABCD* dwusieczna *DE* kąta rozwartego *ADC* i prosta *BC* wyznaczają dwa kąty przyległe, których miary pozostają w stosunku 2 : 3. Oblicz miary kątów równoległoboku *ABCD*.

18. W trójkącie *ABC* dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt *D* dzieli bok *AB* na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt *D* poprowadzono prostą równoległą do boku *AC*, która przecięła bok *BC* w punkcie *E*. Oblicz długości odcinków: *CE*, *BE* i *DE*.

19. W trójkącie *ABC* poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy *AB*, dzielące bok *BC* na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie *ABC* jest o 6 dm większa od podstawy *AB*. Oblicz długość boku *AB*.

20. Liczba przekątnych pewnego wielokąta foremnego jest trzy razy większa od liczby jego boków. Oblicz miarę kąta wewnętrznego tego wielokąta.

D **21.** Miary kątów wewnętrznych pewnego sześciokąta pozostają w stosunku 1: 2: 3: 4: 3 : 2. Wykaż, że ten sześciokąt jest figurą wklęsłą.

22. W trójkącie *ABC* dwusieczna poprowadzona z wierzchołka *C* przecina przeciwległy bok w punkcie *D*. Wiedząc, że $|\sphericalangle BDC| = 100^\circ$ i że odcinek *CD* jest równy jednemu z boków wychodzących z wierzchołka *C*, oblicz miary kątów trójkąta *ABC*.

D **23.** W trójkącie *ABC* przedłużono bok *AB* poza wierzchołek *B* i odłożono odcinek *BD*, równy odcinkowi *BC*. Połączono punkty *C* i *D*. Wykaż, że $|\sphericalangle CDA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBA|$.

24. Oblicz długości boków trójkąta równoramiennego *ABC* wiedząc, że $|AB| = 2a + 5$, $|BC| = a + 6$, $|CA| = 4a - 1$.

25. Rozpatrujemy trójkąty, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi, a obwód jest mniejszy od 17.

a) Wyznacz długości boków trójkąta, który ma największy obwód.
b) Dla wyznaczonego trójkąta oblicz długość odcinka łączącego środki dwóch krótszych boków.

26. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, $|AB| = |BC|$, o obwodzie 200 cm. W trójkącie tym poprowadzono środkowe AD i CE. Obwód trójkąta ACE jest o 20 cm większy od obwodu trójkąta ABD. Oblicz długości boków trójkąta ABC.

27. W trójkącie dwa boki mają długość 3,15 i 0,78. Wyznacz długość trzeciego boku, wiedząc, że wyraża się ona liczbą całkowitą.

D **28.** Przekątne równoległoboku mają długość 10 cm i 8 cm. Wykaż, że obwód czworokąta powstałego z połączenia kolejno środków boków tego równoległoboku jest równy 18 cm.

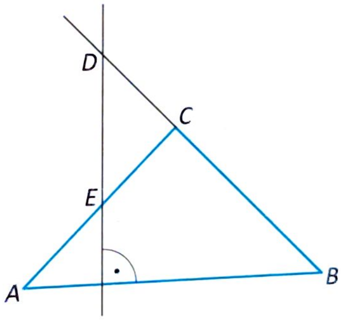
29. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest o 3 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Druga przyprostokątna ma długość 9 cm. Oblicz:

a) obwód trójkąta

b) odległość punktu przecięcia środkowych trójkąta od wierzchołka kąta prostego.

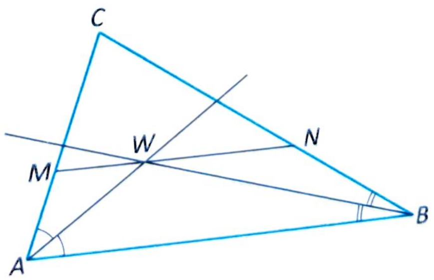
30. W trójkącie prostokątnym równoramiennym środkowa poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 6 cm. Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta ostrego tego trójkąta.

D **31.** W trójkącie ABC boki AC i BC mają taką samą długość. Na półprostej $\overrightarrow{BC}$ poza bokiem BC zaznaczono punkt D tak, że prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do boku AB przecina się z bokiem AC w punkcie E. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoramienny.



D **32.** W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AC. Z punktu D poprowadzono odcinek DE taki, że $DE \perp AB$ oraz $E \in AB$. Wykaż, że długość odcinka DE jest równa połowie wysokości CF.

D **33.** Przez punkt W, w którym przecinają się dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC, prowadzimy równoległą do boku AB. Ta równoległa przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|MN| = |AM| + |BN|$.



34. Boki trójkąta ABC mają długość: $|AB| = 4,8$ cm, $|BC| = 6,4$ cm oraz $|AC| = 8$ cm.

D a) Wykaż trójkąt ABC jest prostokątny.

b) Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest równa 8 cm, a druga jest o 4 cm krótsza od przeciwprostokątnej.

c) Podaj skalę tego podobieństwa.

35. Obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ podobnego do trójkąta ABC w skali 0,25 jest o 12 cm krótszy od obwodu trójkąta ABC. Wyznacz obwody tych trójkątów.

36. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A_1B_1C_1$, a jego obwód jest o 25% krótszy od obwodu trójkąta $A_1B_1C_1$. Podaj, w jakiej skali trójkąt $A_1B_1C_1$ jest podobny do trójkąta ABC.

37. Przez punkt K przecięcia się przekątnych AC i BD trapezu poprowadzono prostą m, prostopadłą do obu podstaw trapezu, która przecina krótszą podstawę DC trapezu w punkcie L, a dłuższą podstawę AB w punkcie M. Wiedząc, że $|LM| = 12$ cm oraz, że $|KL| = 2$ cm i $|LC| = 3$cm, oblicz długość przekątnej AC trapezu.

38. W prostokącie $ABCD$ poprowadzono odcinek AE prostopadły do przekątnej DB i punkt E należy do boku DC prostokąta. Przekątna DB przecina się z odcinkiem AE w punkcie P. Wiedząc, że $|AP| = 8$ cm, $|PE| = 2$ cm, oblicz:

a) długość przekątnej prostokąta

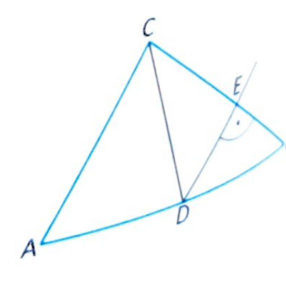
b) długość boków prostokąta.

39. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

40. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, punkty A_1, B_1, C_1 są środkami boków, a punkty K, L, M są środkami odcinków SA, SB, SC. Udowodnij, że $\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta KLM$.

41. W trapezie suma miar kątów ostrych leżących przy dłuższej podstawie jest równa 102°. Dwusieczne tych kątów zawierają przekątne trapezu. Oblicz miary kątów trapezu.

42. W trójkącie ABC na rysunku obok środkowa poprowadzona z wierzchołka C przecina bok AB w punkcie D. Półprosta DE jest dwusieczną kąta BDC. Wykaż, że jeżeli $DE \perp BC$, to trójkąt ABC jest prostokątny.



D **43.** W trójkącie ABC środkowe poprowadzone z wierzchołków A i B są do siebie prostopadłe. Wykaż, że jeżeli $|BC| = a$, $|AC| = b$, to $|AB| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

D **44.** W trójkącie ABC, $|\sphericalangle C| = 90°$, przedłużono bok AC poza punkt C o odcinek CB_1, $|CB_1| = |CB|$ oraz bok BC poza punkt C o odcinek CA_1, $|CA_1| = |CA|$. Połączono punkty A_1 i B_1. Wykaż, że przedłużenie wysokości CD trójkąta ABC zawiera środkową trójkąta A_1B_1C poprowadzoną z wierzchołka C.

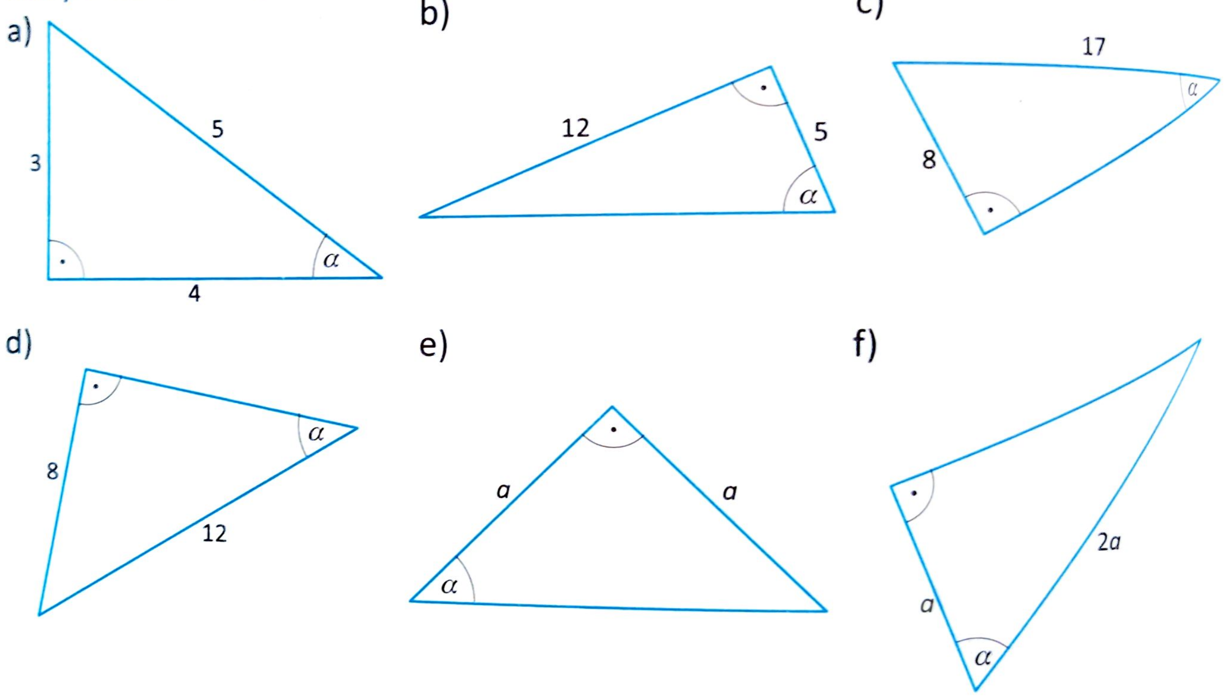
D **45.** Na ramionach kąta o wierzchołku A odkładamy dwa odcinki AB i AC, gdzie $|AB| = |AC|$ i dalej kolejne dwa odcinki BD i CE, gdzie $|BD| = |CE|$. Odcinki BE i DC przecinają się w punkcie O. Wykaż, że prosta AO zawiera dwusieczną kąta BAC.

D **46.** Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$ i $|AB| > |DC|$. Korzystając z własności wektorów wykaż, że odcinek, którego końcami są środki przekątnych AC i BD, jest równoległy do podstaw trapezu, a jego długość jest równa $\frac{|AB| - |DC|}{2}$.

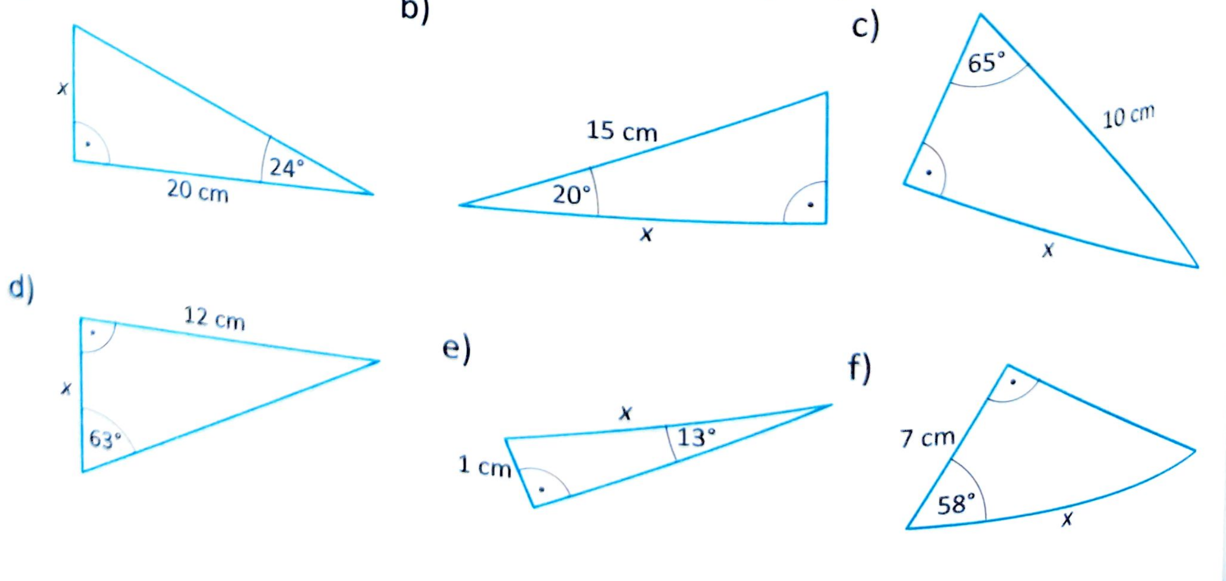
8. Trygonometria kąta ostrego

Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym

8.1. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α w trójkącie prostokątnym na rysunku poniżej.

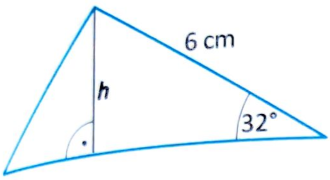


8.2. Oblicz długość boku x, zaznaczonego na rysunku poniżej, z dokładnością do 0,1 cm (patrz tabela wartości funkcji trygonometrycznych, str. 307).

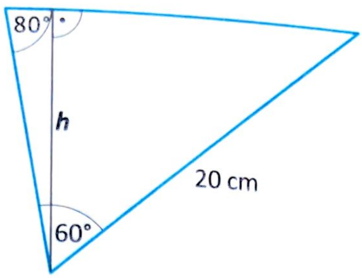


8.3. Korzystając z danych w trójkącie na rysunku poniżej, oblicz wysokość h z dokładnością do 0,1 cm.

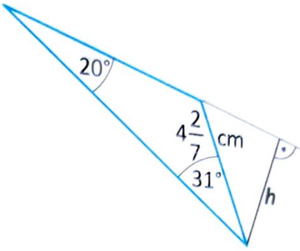
a)



b)

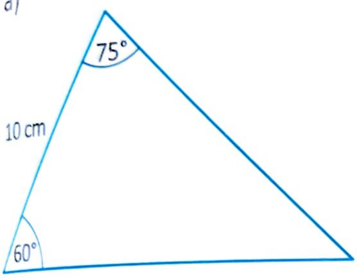


c)

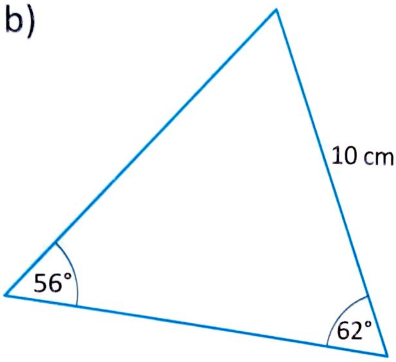


8.4. Oblicz wszystkie wysokości w trójkącie na rysunku poniżej z dokładnością do 0,1 cm:

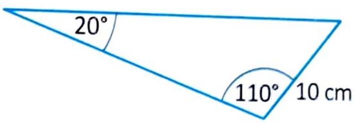
a)



b)



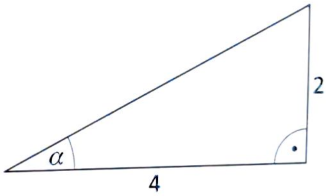
c)



8.5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, wykorzystując dane z rysunku obok.

a) $1 + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

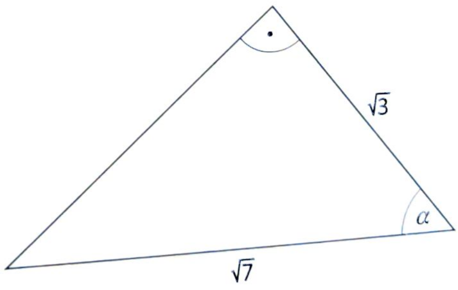
b) $(\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\alpha)^2$



8.6. Oblicz wartość wyrażenia, wykorzystując dane z rysunku obok.

a) $4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha$

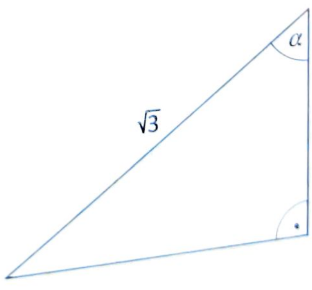
b) $(\sin\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha)^2$



8.7. Oblicz wartość wyrażenia, wykorzystując dane z rysunku obok:

a) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

b) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$



8.8. W trójkącie prostokątnym przyprostokątna przeciwległa kątowi α ma długość a, druga przyprostokątna ma długość b, a przeciwprostokątna c. Wiadomo, że $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{b^2 + c^2}{6ac}$.

8.9. Zbuduj taki kąt α, $\alpha \in (0°, 90°)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

8.10. Zbuduj taki kąt α, $\alpha \in (0°, 90°)$, dla którego:

a) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{6}}$.

8.11. W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątna długości a. Oblicz długość pozostałych boków trójkąta.

a) $a = 4$ cm, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ b) $a = 10$ cm, $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}4$

c) $a = 7$ cm, $\operatorname{tg}\alpha = 1$ d) $a = 6$ cm, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

8.12. W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątna długości a. Oblicz długość pozostałych boków trójkąta.

a) $a = 40$ cm, $\sin\alpha = 0{,}8$ b) $a = 5$ cm, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $a = 3$ cm, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ d) $a = \sqrt{6}$ cm, $\cos\alpha = 0{,}5$

8.13. W pewnym prostokącie przekątna ma długość d i tworzy z jednym z boków kąt α. Oblicz obwód tego prostokąta.

a) $d = 9$ cm, $\cos\alpha = 0{,}6$ b) $d = 2\frac{1}{3}$ cm, $\sin\alpha = \frac{1}{7}$

c) $d = 2\sqrt{17}$ cm, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$ d) $d = 4\sqrt{5}$ cm, $\operatorname{ctg}\alpha = 3$

8.14. W równoległoboku $ABCD$ wysokości mają długość 4 cm i 5 cm, a kąt rozwarty ma 115°. Oblicz obwód tego równoległoboku z dokładnością do 0,1 cm.

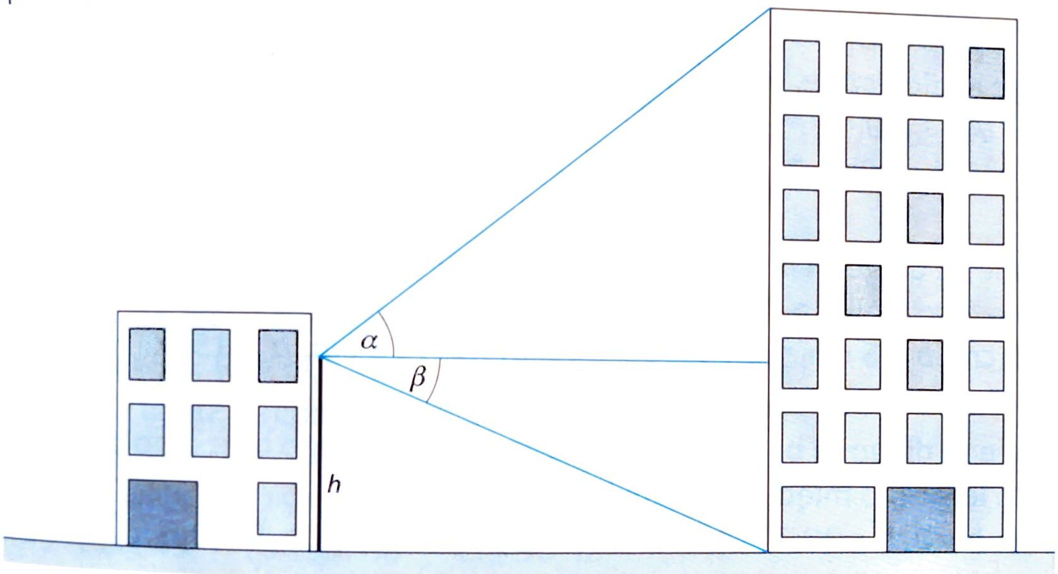
8.15. Promienie słoneczne padają pod kątem 16°. Oblicz długość cienia, który rzuca maszt mający 12,5 m wysokości.

8.16. Drzewo mające 14 m wysokości, rosnące na równinie, rzuca cień długości 23 m. Pod jakim kątem padają promienie słoneczne?

8.17. Kąt wzniesienia baszty, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma baszta?

8.18. Janek stoi na stromym brzegu jeziora, 16 m nad jego poziomem. Zauważył, że po jeziorze płynie łódź, której kąt depresji ma miarę 21°. W jakiej odległości od brzegu znajduje się łódź?

8.19. Z okna znajdującego się na wysokości h zmierzono dwa kąty α i β (patrz rysunek poniżej).

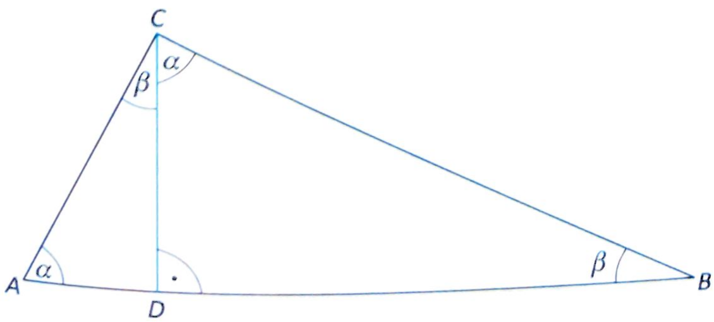


Jaką wysokość ma wieżowiec?

8.20. Porównaj liczby:

a) $\sin 20^\circ$ i $\sin 51^\circ$
b) $\cos 15^\circ$ i $\cos 62^\circ$
c) $\text{ctg}\, 75^\circ$ i $\text{ctg}\, 27^\circ$
d) $\text{tg}\, 26^\circ$ i $\text{tg}\, 29^\circ$
e) $\text{tg}\, 18^\circ$ i $\sin 18^\circ$
f) $\cos 80^\circ$ i $\text{ctg}\, 80^\circ$.

D **8.21.** Dany jest trójkąt prostokątny ABC, $|\sphericalangle C| = 90^\circ$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość CD. Wykażemy, że $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$.



Oznaczmy $|\sphericalangle A| = \alpha$ i $|\sphericalangle B| = \beta$. Wówczas $|\sphericalangle BCD| = \alpha$ i $|\sphericalangle DCA| = \beta$ (dlaczego?).
Obliczmy $\cos\alpha$ na dwa sposoby.
Z zależności w trójkącie prostokątnym ABC otrzymujemy równość

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Z zależności w trójkącie prostokątnym ADC otrzymujemy zależność

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}$$

Zatem

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}, \text{ czyli}$$

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$$

Postępując analogicznie, wykaż, że:
a) $|BC|^2 = |AB| \cdot |DB|$
b) $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$.

8.22. Dane są długości a i b dwóch boków trójkąta oraz miara kąta γ między nimi. Oblicz pole tego trójkąta.
a) $a = 10$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 70°$
b) $a = 16$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 32°$

8.23. Dane są długości boków a i b trójkąta ostrokątnego oraz jego pole P. Wyznacz miarę kąta leżącego między danymi bokami.
a) $a = 10$, $b = 8$, $P = 30{,}2$
b) $a = 8$, $b = 7$, $P = 9{,}6$

8.24. Dwie prostopadłe do siebie siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, zaczepione w tym samym punkcie, mają odpowiednio wartości 20 N i 48 N. Znajdź wartość siły wypadkowej $\vec{F}$ oraz miary kątów, jakie siła $\vec{F}$ tworzy ze składowymi $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

8.25. Kasia siedzi na sankach, które ciągnie jej kolega Jacek, działając siłą o wartości $F = 105$ N. Sanki przylegają do podłoża. Miara kąta α między kierunkiem siły a drogą wynosi 25°. Jaką pracę W wykona Jacek, jeśli będzie ciągnął sanki na drodze $s = 250$ m? Wynik podaj z dokładnością do 1 J.

8.26. Sieradz leży na 51°35′ szerokości geograficznej północnej. Załóżmy, że Ziemia jest kulą o promieniu długości 6370 km. Oblicz:
a) długość promienia równoleżnika, na którym leży Sieradz
b) drogę, jaką przebywa Sieradz, na skutek ruchu wirowego Ziemi, w ciągu 45 minut.

Wyniki podaj z dokładnością do 1 km.

8.27. Kuter płynie z prędkością 8 węzłów w kierunku, który odchyla się od kierunku zachodniego o 33°45′ na południe. O godzinie 9^{35} zauważono tankowiec, 7 mil na zachód od kutra. Tankowiec płynie na zachód z prędkością 5 węzłów. O której godzinie tankowiec będzie znajdował się na północ od kutra?
Uwaga: 1 węzeł = 1 mila morska na godzinę.

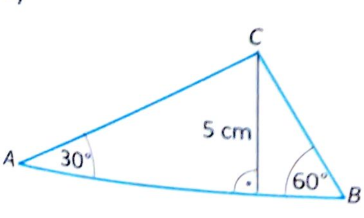
8.28. Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się on na wysokości h metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie t sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością v wznosi się balon?

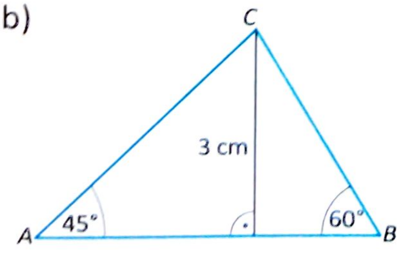
Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów 30°, 45° i 60°

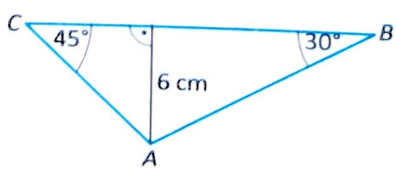
8.29. Oblicz:
a) $4 \cdot \cos 60° \cdot \sin 30° - \cos 30° \cdot \sin 60°$
b) $\mathrm{ctg}\, 30° \cdot \mathrm{ctg}\, 45° : (\mathrm{ctg}\, 60° \cdot \mathrm{tg}\, 45°)$
c) $18 \cdot \sin 30° \cdot \mathrm{tg}\, 30° : (\cos 30° \cdot \mathrm{tg}\, 60°)$
d) $6 \cdot (\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \mathrm{ctg}\, 60°) : (\mathrm{ctg}\, 30° \cdot \sin 45°)$
e) $12 \cdot (\mathrm{tg}\, 60° - \cos 60°) \cdot (\mathrm{tg}\, 30° + \cos 30°)$
f) $(\sin 45° + \mathrm{ctg}\, 45°) \cdot (6 \cdot \sin 60° - \mathrm{ctg}\, 30°)$.

8.30. Oblicz:
a) $(\cos 45° - \cos 30°) \cdot (\cos 45° + \cos 30°)$
b) $(3\sin 45° + \mathrm{tg}\, 60°) \cdot (3\sin 45° - \mathrm{tg}\, 60°)$
c) $(\sin 60° + \cos 30°)^2 - (\sin 30° + \cos 60°)^2$
d) $(\mathrm{tg}\, 60° - \sin 30°) \cdot (\cos 60° - \mathrm{ctg}\, 30°)$
e) $4(\mathrm{ctg}\, 45° + \sin 60°) \cdot (\cos 30° + \mathrm{tg}\, 45°)$
f) $2(\mathrm{tg}\, 30° - \sin 45°) \cdot (\cos 45° - \mathrm{ctg}\, 60°)$.

8.31. Oblicz obwód trójkąta ABC, korzystając z odpowiednich funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.

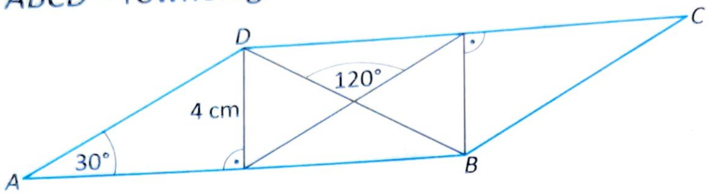
a)


b)


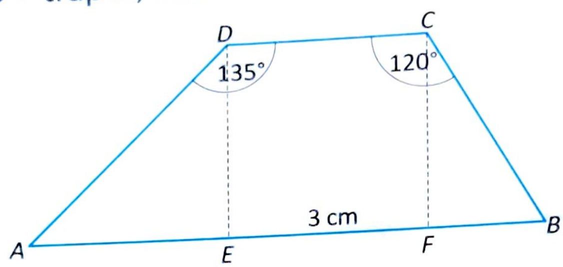
c)


8.32. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$, korzystając z odpowiednich funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.

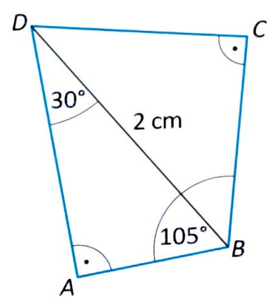
a) $ABCD$ – równoległobok



b) $ABCD$ – trapez, $CDEF$ – kwadrat



c)



8.33. Wyznacz α, $\alpha \in (0°, 90°)$, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ c) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

8.34. W trójkącie ABC kąty α i β są ostre. Wyznacz miary kątów tego trójkąta, jeśli:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{ctg}\beta = 1$

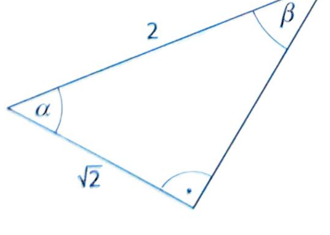
b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

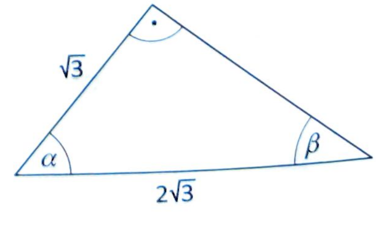
d) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.35. Kąty α i β w trójkącie na rysunku poniżej są ostre. Wyznacz ich miary, korzystając z odpowiednich funkcji trygonometrycznych kątów ostrych.

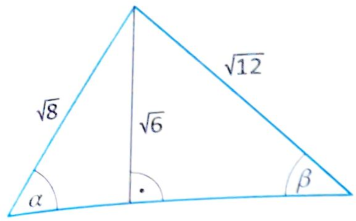
a)



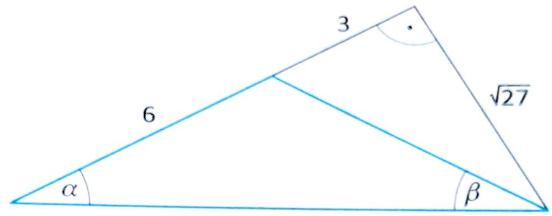
b)



c)



d)



8.36. W trójkącie dwa boki mają długość a i b, a kąt ostry między nimi jest równy γ. Oblicz pole tego trójkąta.

a) $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 60°$
b) $a = 6$ cm, $b = 2$ cm, $\gamma = 45°$

8.37. Ustal, do jakiego przedziału należy:

a) $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 30°, 45° \rangle$
b) $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 60°, 90°)$
c) $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (0°, 30° \rangle$
d) $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in (30°, 45° \rangle$
e) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 45°, 60°)$
f) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (30°, 90°)$
g) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (0°, 45° \rangle$
g) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 30°, 60°)$.

D **8.38.** W trójkącie prostokątnym ABC, kąt przy wierzchołku A jest prosty, zaś $|\sphericalangle ACB| = 60°$. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że $|CB|^2 - 2 \cdot |DB|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$.

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego.

8.39. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że:

a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$
b) $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$
c) $\cos\alpha = \frac{24}{25}$
d) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

8.40. Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{3}{4}$. Bez wyznaczania wartości cosinusa kąta α, oblicz:

a) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
b) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

8.41. Cosinus kąta ostrego α jest równy $\frac{1}{5}$. Bez wyznaczania wartości sinusa kąta α, oblicz:

a) $\sin^2\alpha - 1$
b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$.

8.42. Tangens kąta ostrego α jest równy $2\frac{1}{2}$. Bez wyznaczania wartości sinusa i cosinusa kąta α, oblicz:

a) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ b) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

8.43. Cotangens kąta ostrego α jest równy $\frac{2}{3}$. Bez wyznaczania wartości sinusa i cosinusa kąta α, oblicz:

a) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ b) $\frac{2-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

8.44. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $\frac{4\sin\alpha-5\cos\alpha}{\cos\alpha+3\sin\alpha}$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=5$ b) $\frac{8\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+6\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}\alpha=3$

c) $\frac{\cos\alpha+2\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=4$ d) $\frac{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$, jeśli $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

8.45. Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{3}$ b) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$ c) $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{7}{8}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

8.46. Dana jest jedna funkcja trygonometryczna kąta ostrego α. Zbuduj trójkąt prostokątny, którego jeden z kątów ma miarę α. Następnie, korzystając z własności tego trójkąta, oblicz pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

a) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ b) $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ d) $\operatorname{ctg}\alpha=7$

8.47. Dana jest jedna funkcja trygonometryczna kąta ostrego α. Zbuduj trójkąt prostokątny, którego jeden z kątów ma miarę α. Następnie, korzystając z własności tego trójkąta, oblicz pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.

a) $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ c) $\sin\alpha=0{,}4$ d) $\operatorname{ctg}\alpha=2{,}4$

8.48. Zbadaj, czy istnieje kąt ostry α, dla którego spełnione są następujące warunki:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{4}$ i $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ b) $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}-1$ i $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}+1$ d) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{13}{8}$.

D **8.49.** Wykaż, że wartość danego wyrażenia jest równa 1.

a) $\cos^2(90^\circ - 20^\circ) + \cos^2 20^\circ$
b) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ$
c) $\operatorname{tg} 89^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 89^\circ)$
d) $\operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 75^\circ$

8.50. Oblicz, stosując wzory redukcyjne.

a) $\operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ$
b) $\operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 55^\circ \cdot \operatorname{ctg} 65^\circ$
c) $\sin^2 75^\circ + \sin^2 15^\circ - 2\sin 30^\circ$
d) $(\cos 52^\circ - \cos 38^\circ)^2 + 2\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ + 2\cos 60^\circ$
e) $\operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$
f) $\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

D **8.51.** Wykaż, że prawdziwa jest równość:

a) $\frac{1}{2}\sin^2 51^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos^2 39^\circ = 0$
b) $2\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \operatorname{ctg} 29^\circ \cdot \operatorname{ctg} 61^\circ = \frac{1}{2}$
c) $\cos^2 27^\circ + \cos^2 63^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ = 4$
d) $2\sin^2 15^\circ - 2\cos^2 15^\circ + 4\sin^2 85^\circ = 2$.

8.52. Ustaw dane liczby w porządku rosnącym, bez użycia kalkulatora i tablic trygonometrycznych.

a) $\sin 40^\circ, \cos 40^\circ, \sin 45^\circ$
b) $\sin 65^\circ, \cos 30^\circ, \cos 20^\circ$
c) $\operatorname{tg} 45^\circ, \operatorname{tg} 46^\circ, \operatorname{ctg} 46^\circ$
d) $\operatorname{tg} 50^\circ, \sin 50^\circ, \cos 50^\circ$

8.53. Wiedząc, że kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4}$, oblicz:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$
b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$
c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$
d) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

8.54. Wiedząc, że $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ oraz $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{5}{4}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
b) $\cos\alpha - \sin\alpha$
c) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$
d) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

8.55. Wiedząc, że kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3}$, oblicz:

a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$
b) $\sin\alpha + \cos\alpha$
c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$
d) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

8.56. Kąt α jest ostry. Zapisz dane wyrażenia w prostszej postaci.

a) $\sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

b) $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^3\alpha$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$

d) $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

e) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$

f) $\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

g) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} \cdot (1 - \cos^2\alpha)$

h) $(\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

D **8.57.** Kąt α jest ostry. Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną.

a) $1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $\sin\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right) = \cos^2\alpha$

d) $\cos\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = \sin^2\alpha$

8.58. Kąt α jest ostry. Sprawdź, czy dana równość jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\sin\alpha \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha} = 1$

b) $\cos\alpha \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = 1$

c) $\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$

d) $\cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$

D **8.59.** Wykaż, że dana równość jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\dfrac{\cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha)}{\cos\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha$

b) $\dfrac{\sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}\alpha)$

c) $\dfrac{\cos(90^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} = 1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha + \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}$

D **8.60.** Wykaż, że dana równość nie jest tożsamością trygonometryczną.

a) $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}$

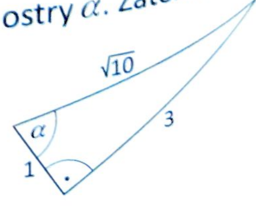
b) $2\cos^2\alpha - 1 = \sin\alpha$

c) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$

d) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

Test sprawdzający do rozdziału 8.

1. W trójkącie prostokątnym na rysunku poniżej dany jest kąt ostry α. Zatem:



A. $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

B. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

C. $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

D. $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$

2. Jeśli α jest kątem ostrym i $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, to:

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ B. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ B. $\sin\alpha = \frac{15}{16}$ D. $\sin\alpha = \frac{1}{16}$

3. Kąt ostry w trójkącie prostokątnym równoramiennym ma miarę α. Zatem:

A. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ B. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ C. $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ D. $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

4. W trójkącie prostokątnym stosunek długości najdłuższego boku do najkrótszego boku jest równy 3 : 2. Jeśli najmniejszy kąt ma miarę β, to:

A. $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{2}$ B. $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$ C. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

5. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = 0{,}9$. Zatem:

A. $\alpha \in (0°, 30°)$ B. $\alpha \in (30°, 45°)$ C. $\alpha \in (45°, 60°)$ D. $\alpha \in (60°, 90°)$

6. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = 0{,}8$. Wówczas:

A. $\alpha \in (0°, 30°)$ B. $\alpha \in (30°, 45°)$ C. $\alpha \in (45°, 60°)$ D. $\alpha \in (60°, 90°)$

7. Tangens kąta ostrego β jest równy $1\frac{1}{2}$. Z tego wynika, że:

A. $\beta \in (0°, 30°)$ B. $\beta \in (30°, 45°)$ C. $\beta \in (45°, 60°)$ D. $\beta \in (60°, 90°)$

8. Jeśli $\operatorname{ctg}\alpha = 3\operatorname{tg}\alpha$ dla pewnego kąta ostrego α, to:

A. $\alpha = 30°$ B. $\alpha = 45°$ C. $\alpha = 60°$ D. $\alpha = 75°$

9. Dla kątów ostrych α i β prawdziwa jest równość $\sin\alpha = \cos\beta$ tylko wtedy, gdy:

A. $\alpha = \beta$ B. $\alpha + \beta = 90°$ C. $\alpha - \beta = 45°$ D. $\alpha + \beta = 45°$

10. Jeśli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \sqrt{2} - 1$, to tangens kąta α jest równy:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ B. $1 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

11. Wyrażenie $\cos^3\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ jest równe:

A. 1 B. $\cos\alpha$ C. $\sin\alpha$ D. 2

12. Kąt β jest ostry i $\operatorname{tg}\beta = 3$. Wówczas wartość wyrażenia $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2$ jest równa:

A. 1 B. $3\frac{1}{3}$ C. $9\frac{1}{9}$ D. $11\frac{1}{9}$

13. Wartość wyrażenia $\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ$ jest równa:

A. 1,25 B. 1 C. 1,75 D. $2\frac{1}{2}$

14. Wartość wyrażenia $\operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. W trójkącie ostrokątnym kąty mają miary α, β, γ. Jeśli $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{63}{65}$ i $\operatorname{tg}\gamma = \frac{3}{4}$, to:

A. $\alpha < \beta < \gamma$ B. $\beta < \gamma < \alpha$ C. $\gamma < \beta < \alpha$ D. $\gamma < \alpha < \beta$

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

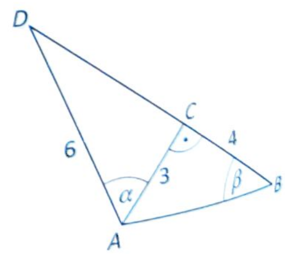
16. W trójkącie prostokątnym α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości a, zaś b jest długością drugiej przyprostokątnej. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, oblicz:

a) tangens α b) wartość wyrażenia $\frac{2b}{a+b}$.

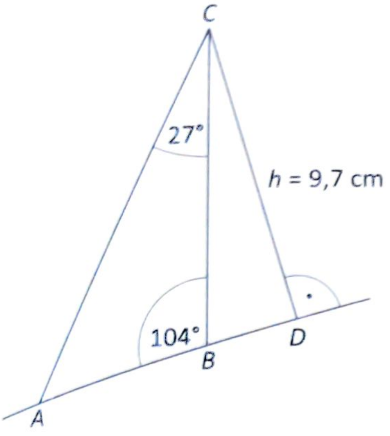
17. Skonstruuj kąt ostry α, wiedząc, że:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$ b) $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ c) $\cos\alpha = 0{,}4$.

18. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku obok, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin^2\alpha - 4\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$.



19. Oblicz obwód trójkąta ABC na rysunku poniżej z dokładnością do 0,1 cm. Skorzystaj z odpowiednich danych umieszczonych w tabeli.



α	$\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\cos\alpha$
49°	0,755	1,150	0,869	0,656
76°	0,970	4,011	0,249	0,242

20. Kolejka prowadząca na szczyt Gubałówki pokonuje na drodze długości 1340 m różnicę wzniesień 300 m. Zakładając, że kolejka porusza się wzdłuż linii prostej oblicz, pod jakim kątem wznoszą się tory kolejki.

21. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(\sin 30^\circ - \cos 45^\circ)(\cos 60^\circ + \sin 45^\circ)$

b) $(\mathrm{tg}\,60^\circ + \mathrm{ctg}\,45^\circ)^2 - 6\mathrm{ctg}\,60^\circ$

22. Punkt *A* leży na jednym ramieniu kąta o mierze 60°, w odległości 10 od wierzchołka tego kąta. Oblicz odległość punktu *A* od drugiego ramienia tego kąta.

23. Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{4}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α.

24. Sinus kąta ostrego α jest równy $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz:

a) $\mathrm{tg}^2\alpha$

b) $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sqrt{3}\cos\alpha$.

25. Cosinus kąta ostrego α jest równy $\sqrt{2} - 1$. Oblicz:

a) $2\sin^2\alpha - 2$

b) $\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

26. Czy istnieje kąt ostry α, którego:

a) $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}8$

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}5$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}6$?

27. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\cos^2 15^\circ - \cos^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ + \cos^2 75^\circ$

b) $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \ldots + \sin^2 80^\circ$

c) $\mathrm{tg}\,35^\circ \cdot \mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{tg}\,45^\circ \cdot \mathrm{tg}\,50^\circ \cdot \mathrm{tg}\,55^\circ \cdot \mathrm{tg}\,60^\circ$

28. Kąt α jest ostry. Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 2\frac{2}{3}$, oblicz $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

29. Kąt α jest ostry. Wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, oblicz $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

30. Suma sinusów kątów ostrych w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Oblicz iloczyn cosinusów tych kątów.

31. Kąt α jest ostry oraz $\frac{\cos\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)} - \frac{3\cos(90^\circ-\alpha)}{\cos\alpha} = 2$. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

32. Ustal, do jakiego przedziału należy:

a) $\sin\alpha$, jeśli $\alpha \in (45^\circ, 60^\circ\rangle$

b) $\cos\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 30^\circ, 60^\circ)$

c) $\operatorname{tg}\alpha$, jeśli $\alpha \in \langle 30^\circ, 45\rangle$

d) $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\alpha \in (30^\circ, 45^\circ\rangle$.

D **33.** Dany jest trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątna przyległa do kąta α ma długość n, gdzie $n > 1$. Druga przyprostokątna jest o 1 krótsza od przeciwprostokątnej. Wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{n^2+2n-1}{n^2+1}$.

D **34.** Wykaż, że jeśli liczby x, a są dodatnie i dla dowolnych kątów ostrych α i β prawdziwe są równości: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{x}{a}}$, to $\alpha = \beta$.

D **35.** Wykaż, że jeśli α jest kątem ostrym, to $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geq 2$.

Odpowiedzi do zadań

1. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste

Zbiór. Działania na zbiorach

1.1. $A=\{1, 2, 5, 10\}$ $B=\{0, 1, 9, 13, 64, 121\}$ $C=\left\{5,-\sqrt{2},0,-1,-\pi\right\}$

$D=\left\{-1,-2,\frac{3}{5},\frac{\sqrt{7}}{7},3\frac{1}{4}\right\}$

1.2. $A=\{0, 3, 6, 12\}$ $B=\{\dots,-10,-5,0,5\}$ $C=\left\{-7\sqrt{2},-\sqrt{2},0,4+\sqrt{2},15\sqrt{2}\right\}$

$D=\{-\pi^2, 0, \pi^2, 2\pi^2, \dots\}$

1.3. $C=\left\{x\colon x=\frac{1}{5\cdot n}\text{ i } n\in \boldsymbol{N}_+\right\}$ $D=\{x\colon x^3-5>22\text{ i } x\in \boldsymbol{R}\}$ $F=\left\{x\colon \frac{1}{x}\geqslant\sqrt{2}\text{ i } x\in\boldsymbol{R}-\{0\}\right\}$

$G=\{x\colon x+x^2\leqslant 4\text{ i } x\in \boldsymbol{R}\}$

1.4. c) $\varnothing$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$ $\{a, b, c\}$

1.5. a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A\cap B=\{3, 5\}$ b) $A\cup B=B$ $A\cap B=A$
c) $A\cup B=A$ $A\cap B=B$ d) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ $A\cap B=\varnothing$

1.6. a) $A-B=\{1, 3\}$ $B-A=\{6, 8, 10\}$ b) $A-B=\{10\}$ $B-A=\{2, 3, 7\}$
c) $A-B=\varnothing$ $B-A=\{3, 9, 15, 21\}$ d) $A-B=\{2, 6, 10, 14, \dots\}$ $B-A=\varnothing$

1.7. a) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A\cap B=\{1, 3\}$ $A-B=\{4, 5, 6\}$ $B-A=\{2\}$
b) $A\cup B=B$ $A\cap B=A$ $A-B=\varnothing$ $B-A=\{5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95\}$

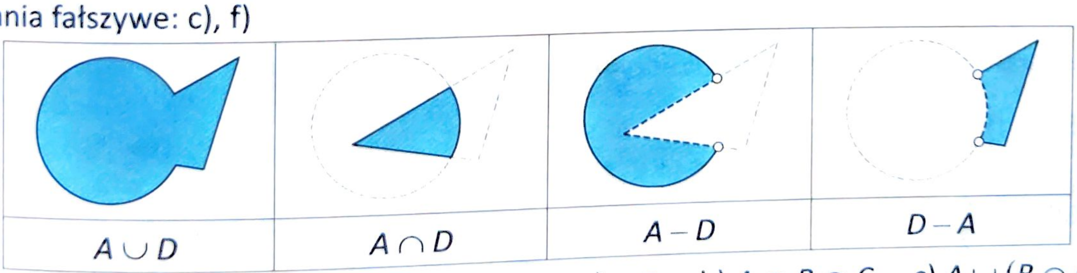
1.8. *wskazówka*: $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $B=\{3, 6, 9, 12\}$
$A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ $A\cap B=\{6, 12\}$
$A-B=\{2, 4, 8, 10\}$ $B-A=\{3, 9\}$

1.9. *wskazówka*: $A=\{-3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ $B=\{-2, 1, 4, 7, 10\}$
$A\cup B=\{-3, -2, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$ $A\cap B=\{1, 7\}$
$A-B=\{-3, -1, 3, 5, 9\}$ $B-A=\{-2, 4, 10\}$

1.10. zdania prawdziwe: a), b), c), d), f)

1.11. zdania fałszywe: c), f)

1.12. d)



1.13. podajemy przykładowe rozwiązania: a) $(A\cap C)-B$ b) $A\cap B\cap C$ c) $A\cup(B\cap C)$
d) $(A\cup B)-C$ e) $(A\cup B)-(A\cap B)$ f) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)-(A\cap B\cap C)$

1.14. a) $A'=\{0, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $B'=\{0, 4, 5, 7, 8, 9\}$ $A'\cup B'=\{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A'\cap B'=\{0, 5, 7, 9\}$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$
b) $A'=\{5, 6, 7, 8, 9\}$ $B'=\{8, 9\}$ $A'\cup B'=A'$ $(A\cup B)'=B'$ $A'\cap B'=B'$ $(A\cap B)'=A'$
c) $A'=\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ $B'=\{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$ $A'\cup B'=U$ $(A\cup B)'=\{6, 8\}$
$A'\cap B'=(A\cup B)'$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

1.16. 7

1.17. zbiór A ma 6 elementów; zbiór B ma 7 elementów

1.18. 7 niebieskich opli

1.19. tak; *wskazówka:* Załóżmy, że żaden uczeń nie zna trzech języków. Wtedy różnica między sumą liczby uczniów znających poszczególne języki (26 + 23 + 24 = 73) a liczbą uczniów w klasie (73 – 36 = 37) jest równa sumie liczby uczniów znających dokładnie 2 języki. Ta liczba jest o 1 większa od liczby wszystkich uczniów w klasie (37 – 36 = 1) co, oczywiście, jest niemożliwe.

1.20. a) 2 osoby b) 9 osób c) 1 osoba

1.21. co najmniej jedna czerwona róża i co najwyżej siedem czerwonych róż

1.22. co najmniej trzech chłopców i co najwyżej dziewięciu chłopców

Zbiory liczbowe

1.23. wypowiedzi prawdziwe: a), b), d), e), f)

1.24. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ c) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ f) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1.25. a) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ b) $A = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ c) $A = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$

1.26. a) 0,625 b) 1,1(6) c) 4,(285714) d) 2,(4) e) 3,875 f) 1,(18)

1.27. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{11}{90}$ e) $\frac{23}{999}$ f) $\frac{127}{990}$

1.28. a) $\frac{10}{37}$ b) $\frac{101}{165}$ c) $\frac{-25}{9}$ d) $\frac{-797}{110}$ e) $\frac{11}{2}$ f) $\frac{-77}{74}$

1.29. wszystkie oprócz liczby $\sqrt{2}$

1.30. $\left\{-\sqrt{25{,}2}; \frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt[4]{5}; 2\pi\right\}$

1.31. a) $\sqrt{2}$ leży pomiędzy liczbami 1,4 oraz $1\frac{3}{7}$; a $\sqrt{3}$ – pomiędzy liczbami 1,7 oraz $\frac{7}{4}$

b) tak

1.36. a) 2,5 b) $\frac{6}{7}$ c) $\frac{5}{18}$ d) 0 e) $3-\sqrt{2}$ f) $\sqrt{2}-1$ g) $\sqrt{7}-2$ h) $8-2\pi$

1.37. a) $1{,}7-2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 0 d) $\sqrt{3}-1$ e) 2,6 f) $2-\sqrt{2}$ g) $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ h) -3

Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

1.38. a) 550 b) 220 c) $25\frac{3}{7}$ d) 24,5

1.39. a) $\frac{2}{7}$ b) 4,7 c) 1 d) 110

1.40. a) 3 b) 4 c) 11 d) 7,2

1.41. a) –115 b) –3 c) 2 d) 1,5

1.43. a) 37,5 b) 0,13 c) 21 d) 8

1.44. d) $6(\sqrt{5}+6\sqrt{7}-2)$ e) $4(1-2\sqrt{2})$ f) $2(3\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$ g) $-7(1-2\pi)$

h) $-2\pi(1+2\sqrt{5})$

1.45. a) $1-2\sqrt{2}$ b) $\frac{-1+4\sqrt{5}}{2}$ c) $3-\sqrt{2}$ d) $\frac{-1+2\sqrt{3}}{4}$ e) $-1+2\sqrt{3}$ f) $-1-5\sqrt{2}$

g) –1 h) π i) $\frac{-1}{2}$

1.46. a) $\frac{1}{4}(20+\sqrt{3})$ b) $\frac{1}{3}(1-3\sqrt{2})$ c) $\frac{1}{5}(5\pi-1)$ d) $\frac{1}{2}(-4+\sqrt{2})$ e) $\frac{1}{5}(1-25\sqrt{5})$
f) $-\frac{3}{2}\left(1+\frac{4}{3}\pi\right)$ g) $\frac{1}{\pi}(-2+\pi\sqrt{3})$ h) $\frac{1}{\sqrt{3}}(1-3\sqrt{3})$ i) $\frac{1}{2\pi}(2\pi\sqrt{2}+3)$

1.47. a) $-5; \frac{1}{5}$ b) $-0,(5); 1\frac{4}{5}$ c) $1; -1$ d) $\frac{-\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}$ e) $\pi-2; \frac{1}{2-\pi}$
f) $-1-\sqrt{2}; \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

1.52. c) $\frac{4}{2-\pi}<\frac{3}{2-\pi}$ d) $\frac{-2}{\sqrt{5}-3}<\frac{-3}{\sqrt{5}-3}$ e) $-7>\frac{-7}{\sqrt{2}-1}$ f) $\frac{4}{2\sqrt{2}-2}<\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

1.53. a) $\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{89\cdot 90}=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{89}-\frac{1}{90}\right)=$
$=\frac{1}{10}-\frac{1}{90}=\frac{8}{90}=\frac{4}{45}$ b) $\frac{20}{21}$ c) $\frac{50}{101}$ d) $\frac{6}{25}$

Przedziały

1.56. a) $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ b) $0, 1, 2$ c) 11 d) 789 e) -5 f) -23
1.60. a) $A \cup B = \langle -2, 6\rangle$ $A \cap B = (0, 3)$ b) $A \cup B = (-\infty, 4\rangle$ $A \cap B = \{2\}$
c) $A \cup B = (-4, +\infty)$ $A \cap B = (\sqrt{3}, 2)$ d) $A \cup B = \left(-\infty, 3\frac{1}{3}\right\rangle$ $A \cap B = (-\infty, \pi)$
1.61. a) $A - B = \langle -5, -2\rangle$ $B - A = (1, 4)$ b) $A - B = (7, 9\rangle$ $B - A = \{3\}$
c) $A - B = (-\infty, \sqrt{2})$ $B - A = \langle 2, +\infty)$ d) $A - B = (-2, 1\rangle \cup (3, 6)$ $B - A = \varnothing$
1.62. a) $A \cup B = (-1, 5\rangle$ $A \cap B = \langle 2, 4\rangle$ $A - B = (-1, 2)$ $B - A = (4, 5\rangle$
b) $A \cup B = (-2, 4)$ $A \cap B = \varnothing$ $A - B = (-2, 1)$ $B - A = \langle 1, 4)$
c) $A \cup B = (-\infty, 7\rangle$ $A \cap B = (4, 6\rangle$ $A - B = (-\infty, 4\rangle$ $B - A = (6, 7\rangle$
d) $A \cup B = \boldsymbol{R}$ $A \cap B = (2, 3\rangle$ $A - B = (3, +\infty)$ $B - A = (-\infty, 2\rangle$
1.63. a) $A \cup B = (-1, 2) \cup \langle 3, 6\rangle$ $A \cap B = \langle 0, 1)$ $A - B = (-1, 0) \cup \langle 3, 6\rangle$ $B - A = \langle 1, 2)$
b) $A \cup B = (-4, 3)$ $A \cap B = \langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, 1)$ $A - B = \langle -1, 0)$ $B - A = (-4, -2) \cup \langle 1, 3)$
c) $A \cup B = \langle -4, 0\rangle \cup (3, 7)$ $A \cap B = \langle -3, -2\rangle \cup (5, 6)$ $A - B = (-2, 0\rangle \cup \langle 6, 7)$
$B - A = \langle -4, -3) \cup (3, 5)$
d) $A \cup B = \langle -2, 1) \cup (2, 5\rangle$ $A \cap B = (-1, 0) \cup (3, 4\rangle$ $A - B = \langle 0, 1) \cup (2, 3\rangle$
$B - A = \langle -2, -1\rangle \cup (4, 5\rangle$
1.64. e) $A' = (-\infty, -5\rangle$ f) $A' = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, 4) \cup (5, +\infty)$
1.65. a) $(-\infty, 3\rangle$ f) $(-\infty, -8) \cup (-8, 0) \cup (0, +\infty)$ h) $(-\infty, -3\rangle \cup (4, +\infty)$
1.66. a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ c) $\{-5, -4, -3, -2\}$ d) $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$
e) $\{-49, -48, -47, \ldots, 0, 1, 2\}$ f) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
1.67. a) $\{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ b) $\langle 3, +\infty) \cup \{0, 1, 2\}$ c) $(3, 4) \cup (4, 5)$ d) $\{-2, -1\}$
e) $\{0, 1, 2, 3\}$ f) $\{\ldots, -3, -2, -1\} \cup (5, +\infty)$

Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych

1.68. a) 10 b) 4 c) 4 d) 7 e) 8 f) 5 g) 4 h) 4
1.69. a) $2 \cdot 3 \cdot 41$ b) $5 \cdot 5 \cdot 5$ c) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ d) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

1.70. a) $\{1, 3, 9, 27\}$ b) $\{1, 43\}$ c) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ d) $\{1, 5, 13, 65\}$
1.71. a) 2, 3, 4, 6, 8 b) 3, 9 c) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 d) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
1.72. a) tak b) tak c) tak d) nie
1.73. $X = 0$ lub $X = 3$, lub $X = 6$, lub $X = 9$
1.74. $X = 1$ lub $X = 4$ lub $X = 7$
1.75. a) 78; 13260 b) 55; 660 c) 50; 23100 d) 198; 5940 e) 12; 3960
f) 98; 1470
1.76. a) $x = 5n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ d) $x = 18n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$
1.77. 50,4 m
1.78. 19800 dni
1.79. a) o $8\frac{40}{}$ b) 4 razy
1.80. o $15\frac{40}{}$
1.81. a) 121; $243 = 2 \cdot 121 + 1$ b) 48; $243 = 5 \cdot 48 + 3$
1.82. a) 10 r. 18; $248 = 23 \cdot 10 + 18$
1.83. a) -11 r. 5; $-248 = 23 \cdot (-11) + 5$ b) -3 r. 16; $146 = 54 \cdot (-3) + 16$
1.84. a) $A = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$ b) $B = \{3, 8, 13, 18, \ldots\}$ c) $C = \{6, 2, -2, -6, -10, \ldots\}$
d) $D = \{-7, -1, 5, 11, \ldots\}$
1.85. a) $x = p + 5$, gdzie $p \in \boldsymbol{N}$ b) $x = n - 2$, gdzie $n \in \boldsymbol{N} - \{0, 1\}$ e) $x = 4n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$
g) $x = 4n + 3$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$
1.86. e) $2k - 6, 2k - 4, 2k - 2, 2k$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$ g) $3k + 1, 3k + 2$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
1.87. a) 4 b) 7; *wskazówka:* $10k - 3 = 10(k - 1) + 10 - 3 = 10(k - 1) + 7, k \in \boldsymbol{Z}$ c) 7
d) 1 e) 2 f) 3
1.88. a) nie b) tak c) tak
1.89. a) tak b) tak c) nie
1.90. a) 21 b) 6 c) 1
1.91. a) nie b) tak c) tak
1.92. a) nie b) nie c) tak
1.93. a) 128 b) 273 c) 17 d) 277
1.94. 24 i 144 lub 48 i 120 lub 72 i 96
1.95. 21 i 294 lub 42 i 147
1.96. a) $n \in \{1, 2, 4\}$ b) $n = 4$
1.97. $n \in \{1, 2, 3, 6, 12\}$
1.98. 36
1.99. 552 lub 1104 lub 1656
wskazówka: $x - 120 = 24k$, więc $x = 24(k + 5)$ oraz $x - 92 = 46m$, czyli $x = 46(m + 2)$, $k, m \in \boldsymbol{N}$. Zatem x jest wielokrotnością liczby $NWW(24, 46)$, mniejszą od 2000.
1.100. 5
1.101. 19

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o równaniach

1.102. a) równanie spełniają liczby: $-2, -1$
1.103. a) $x = 0$ b) $x = -2$ c) $x = 7$ d) równanie sprzeczne, nie ma rozwiązań
e) $x = -5$ f) równanie sprzeczne, nie ma rozwiązań g) $x = -1$ h) $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
i) $x \in \{0,5; -0,5\}$
1.104. a) $x \in \{0, 4\}$ b) $x \in \{-11, 9\}$ c) $x \in \{-5, 3\}$ d) $x \in \{0, -8, 8\}$
e) $x \in \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ f) $x \in \{0, -1, 2\}$

1.105. a) $D=\mathbf{R}-\{2\}$ b) $D=\mathbf{R}-\{1,-1\}$ c) $D=\mathbf{R}-\{0\}$ d) $D=\mathbf{R}-\{-4\}$
e) $D=\mathbf{R}-\{-3,3\}$ f) $D=\mathbf{R}-\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\}$

1.106. a) $D=\mathbf{R}$ b) $D=\mathbf{R}-\{-1,0\}$ c) $D=\mathbf{R}-\{-5,0,5\}$ d) $D=\mathbf{R}-\{-4,-3,3\}$
e) $D=\langle 0,1)\cup(1,+\infty)$ f) $D=(0,2)\cup(2,+\infty)$

1.107. a) $D=\mathbf{R}-\{0\}$; $x=3$ b) $D=\mathbf{R}-\{0\}$; $x\in\{-4,4\}$ c) $D=\mathbf{R}-\{2\}$; $x=-2$
d) $D=\mathbf{R}-\{-3\}$; $x\in\{-5,1\}$ e) $D=\mathbf{R}-\{-7,7\}$; równanie sprzeczne, nie ma rozwiązań f) $D=\mathbf{R}-\{0,6\}$; $x=-6$

1.108. a) $D=\mathbf{R}$; $x=0$ b) $D=\mathbf{R}$; $x\in\{2,-2\}$ c) $D=\langle -1,+\infty)$; $x=-1$
d) $D=\langle 0,+\infty)$; $x=0$ e) $D=(0,+\infty)$; $x=16$ f) $D=(-\infty,0)$; $x=-2$

1.109. b) np. $x(x+4)=0$

1.111. a) $D=\mathbf{R}$. Niech (np.) $x=2$. Wówczas $L=2^3=8$; $P=2$; istnieje liczba rzeczywista, dla której $L\neq P$, zatem równanie nie jest tożsamościowe. Równanie nie jest sprzeczne, bo istnieją rozwiązania tego równania, np. liczba 1 spełnia to równanie.

1.112. a) $x=-2$ b) $x=1$ c) $x\in\{0,6\}$ d) $x\in\{-1,0\}$ e) $x=4$ f) równanie sprzeczne g) $x=1$ h) $x=-2$

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych

1.113. a) –3 nie; 3 tak b) 1 nie; $\frac{1}{2}$ nie c) –8 tak; $1\frac{1}{3}$ nie d) 0 tak; $2\frac{1}{5}$ tak

1.114. a) $D=\mathbf{R}$, $x=-4$ b) $D=\mathbf{R}-\{-2\}$, $x=5$ c) $D=\mathbf{R}$, równanie sprzeczne
d) $D=\mathbf{R}$, $x=-0{,}5$ e) $D=\mathbf{R}-\{1\}$, $x=-11$ f) $D=\mathbf{R}$, równanie tożsamościowe
g) $D=\mathbf{R}-\{-4\}$, $x=32$ h) $D=\mathbf{R}-\{-3,0\}$, $x=-1$

1.115. a) równania I i II są równoważne b) równania I i II są równoważne
c) żadne dwa równania nie są równoważne
d) równania I, II i III są równoważne

1.116. a) $x=2$ b) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $x\in\{-4,4\}$ c) $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $x\in\{-\sqrt{6},\sqrt{6}\}$
d) $D=\mathbf{R}-\{1\}$, $x=\frac{1}{2}$ e) równanie sprzeczne f) $x=19$
g) równanie tożsamościowe h) $x=-0{,}5$

1.117. a) $x=\frac{5}{\sqrt{2}}$ b) $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ c) $x=\frac{6}{\sqrt{2}+1}$ d) $x=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ e) $x=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
f) $x=\frac{15}{\sqrt{5}+1}$

1.118. a) –9 b) –1 c) $-\sqrt{6}$ lub $\sqrt{6}$ d) 5 e) 1 f) $-\sqrt{3}$ lub $\sqrt{3}$ g) –25 h) –6

1.119. a) $a=-6$ b) $a=5$ c) $a=3$ d) $a=19$ e) $a=-1$ f) $a=2$ g) $a=3$ h) $a=2$

1.120. a) –56, –54, –52 b) –51, –49, –47

1.121. a) 20, 18, 16, 14 b) 25, 27, 29, 31

1.122. 0 oraz 2

1.123. –2 oraz 0

Nierówność z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych

1.124. a) –5 tak, $\sqrt{3}$ nie, 0 nie b) $-\sqrt{5}$ nie, 0 tak, 2,5 tak c) wszystkie należą
d) –10 nie, $-\sqrt{3}$ tak, 0 nie e) 0 tak, –10 nie f) 2 tak, –7 nie

1.125. a) $x \in (3, +\infty)$ b) $x \in (3, +\infty)$ c) $x \in \langle 12, +\infty)$ d) $x \in \left(-\infty, -4\frac{1}{2}\right\rangle$
e) $x \in \left(-\infty, \frac{3}{8}\right)$ f) $x \in \langle -4, +\infty)$ g) $x \in (-\infty, 4\rangle$ h) $x \in (-\infty, -2)$
1.126. a) nie b) tak c) nie d) nie e) nie f) tak g) nie h) tak
1.127. a) nierówności równoważne to I i II b) nierówności równoważne to I i III
c) nierówności równoważne to I, II i III d) nierówności równoważne to I i II
1.128. a) $x \in (-\infty, -6\rangle$ b) nierówność sprzeczna c) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$
d) $x \in \left(-2\frac{2}{3}, +\infty\right)$ e) $x \in (-\infty, -10\rangle$ f) $x \in \left\langle -1\frac{5}{9}, +\infty\right)$
g) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$ h) $x \in \langle -9, +\infty)$
1.129. a) $x \in (-10, -4)$ b) $x \in \langle -3, 2\rangle$ c) $x \in (-\infty, -2)$ d) $x \in (-3, 7\rangle$ e) $x \in (-5, 4\rangle$
f) $x \in \langle 2, +\infty)$ g) nierówność sprzeczna h) $x = 1$
1.130. a) $x \in (-2, +\infty)$ b) nierówność sprzeczna c) $x \in (-\infty; 12{,}5\rangle$
d) $x \in (-\infty, -6\rangle$ e) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$ f) nierówność sprzeczna
g) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$ h) $x \in (-\infty, 13\rangle$
1.131. a) $x \in \left(-2\frac{1}{3}, +\infty\right)$ b) $x \in \left(-\infty, -3\frac{1}{3}\right)$ c) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$
d) $x \in \left\langle \frac{-17}{20}, +\infty\right)$ e) $x \in \left(5\frac{3}{4}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, -1\rangle$
1.132. a) $x < \frac{1}{1-\sqrt{3}}$ b) $x > \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ c) $x \le 1$ d) $x \le -1$ e) $x > \frac{1}{\pi - 3}$
f) $x \ge \frac{2}{1-\sqrt{3}}$ g) $x \le \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ h) $x > 2$
1.133. a) $a = 6$ b) $a = 13$ c) $a = -1$ d) $a = -2$ e) $a \in \langle -2, +\infty)$
f) $a = 4$ g) $a = 3$ h) nie istnieje taka liczba a
1.135. a) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$ b) nierówność sprzeczna c) $x = -1$
d) $x \in \boldsymbol{R} - \{3\}$ e) nierówność sprzeczna f) nierówność tożsamościowa, $x \in \boldsymbol{R}$
g) $x \in \boldsymbol{R} - \{4\}$ h) $x = 7$
1.136. a) $x \in (0, +\infty)$ b) $x \in (0, 2)$ c) $x \in (-\infty, 0)$ d) $x \in (-5, 0)$
1.137. a) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \{0\}$ b) $x \in \langle 3, +\infty) \cup \{0\}$ c) $x \in (-\infty, -1)$
d) $x \in (-5, 0) \cup (0, +\infty)$

Procenty

1.138. a) 0,36 b) 57,6 c) 14 d) 40,5
1.139. a) 15 b) 750 c) 20 000 d) 6,25
1.140. a) 250% b) 70% c) 4,5% d) $46\frac{2}{3}\%$
1.141. a) 125% b) 300% c) 350% d) 150%
1.142. a) o $11\frac{1}{9}\%$ b) o 10%
1.143. Powierzchnia jeziora Hańcza jest o 933,33% większa od powierzchni Wielkiego Stawu.
Powierzchnia Wielkiego Stawu jest o 90,32% mniejsza od powierzchni jeziora Hańcza.

1.144. Rzeka Jangcy jest o 223,1% dłuższa od rzeki Tygrys. Rzeka Tygrys jest o 69,0% krótsza od rzeki Jangcy.
1.145. 3 595 zł 20 gr
1.146. 2199 zł 92 gr
1.147. 68 zł 88 gr
1.148. 2 840 zł
1.149. o 21%
1.150. o 12%
1.151. o 20%
1.152. o 20%
1.153. o 10%
1.154. o 25 zł
1.155. 36
1.156. wcześniej do szkoły dotrze Jola
1.157. $\frac{3}{4}$ l octu; $1\frac{3}{4}$ l wody
1.158. 0,3 litra
1.159. 44,3 g
1.160. a) ok. 15,4% b) 6469,1% c) w 2015 r. i w 2016 r.
1.161. a) 700 b) 22 zł 42 gr c) 31,2% d) 23 566 zł e) 653 zł 49 gr f) 2912 zł 51 gr, około 14,6%
1.162. a) 1840 zł b) 2336 zł
1.163. 23 400 zł
1.164. a) 109,2% b) 70% c) 56% d) 170,6%
1.165. a) 27 040 zł b) 27 050,40 zł c) 27 055,70 zł
1.166. 6%
1.167. kwota po roku w banku A: $1{,}04060401 \cdot k$; w banku B: $1{,}05 \cdot k$, gdzie k oznacza kwotę początkową; pani Teresa Kowalska powinna wybrać bank B
1.168. b) 504 zł c) o 7% d) 24%
1.169. a) 3480 zł, 3360 zł, 3240 zł, 3120 zł b) 10%
1.170. 542 zł 40 gr; 9,04% *wskazówka*: Niech K oznacza kwotę kredytu wraz z odsetkami za 2 miesiące niespłacania kredytu, wówczas $K = 6000 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 6242{,}40$. Pierwsza rata to $\frac{1}{6}$ kredytu plus odsetki, czyli 1000 zł + 242,40 zł = 1242,40 zł. Druga rata jest równa 1000 zł + 5000 · 0,02 zł = 1100 zł, trzecia to 1000 zł + 4000 · 0,02 = 1080 zł, itd.

Punkty procentowe

1.171. a) siatkówka – wzrost o 2,2 punkty procentowe, czyli o 220 punktów bazowych; koszykówka – wzrost o 1,5 punktu procentowego, czyli o 150 punktów bazowych b) siatkówka – wzrost o 40%; koszykówka – wzrost o 25%
1.172. a) czytelnictwo w klasie I C było wyższe od klasy I B o 1,56 p. procentowych, czyli o 156 p. bazowych, zaś od klasy I A było wyższe o 9,36 p. procentowych, czyli o 936 p. bazowych b) o 40% c) o 25%
1.173. a) 27% b) o 12,5%
1.174. a) o 1,5 p.p. b) o 7,5%
1.175. a) o 1,5 punktu procentowego b) o 7,5%
1.176. a) o 0,25 punktu procentowego b) o 25 punktów bazowych c) o $9\frac{1}{11}$%

1.177. 7,2%
1.178. w pierwszym wynosiła 1,1%; w drugim wynosiła –0,1%
Uwaga: Ujemna inflacja (tzw. deflacja) oznacza wzrost siły nabywczej pieniądza.

Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

1.179. a) 0,2 b) 0,5 c) 0,5 d) 0,1
1.180. a) 1,25 b) 0,15 c) 69,35 d) 300,91
1.181. a) 3500 b) 15 200 c) 231 600 d) 100
1.183. błąd bezwzględny: 21 zł, błąd względny: ok. 0,049; błąd procentowy: ok. 4,9%
1.184. błąd bezwzględny: 7 km, błąd procentowy: 0,14%
1.185. pow. Francji: błąd bezwzględny 1,5 tys. km^2, błąd procentowy ok. 0,27%; pow. Polski: błąd bezwzględny 2,685 tys. km^2, błąd procentowy ok. 0,9%; pow. Wielkiej Brytanii: błąd bezwzględny 5,9 tys. km^2, błąd procentowy ok. 2,4%
1.186. a) w pierwszym b) w pierwszym
1.187. a) $x = 13{,}788$ b) $x = 1{,}047$ c) $x = 8{,}66$ d) $x = 24{,}1034$
1.188. a) 13,55 b) 24,14 c) 120,398 d) 6,25
1.189. a) 223,607 b) 0,236 c) 5,196 d) 47,124 e) 26,458 f) 0,490
1.190. a) 5,7 cm b) 1,3 cm c) 11,3 cm
1.191. a) $x < y$ b) $x > y$ c) $x > y$ d) $x < y$
1.192. a) tak b) tak

Test sprawdzający do rozdziału 1.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**C**	**C**	**B**	**A**	**D**	**C**	**A**	**D**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**A**	**B**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 1.

16. $A \cup B = \{0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$ $A \cap B = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$ $A - B = \{5\sqrt{2}\}$
$B - A = \{0\}$
17. a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ b) $(A \cup B)' = \{\ldots, -5, -4, -3\}$
c) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ d) $(A \cap B)' = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}$
e) $A' \cup B' = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \{6, 7, 8, \ldots\}$ f) $A' \cap B' = \{\ldots, -5, -4, -3\}$
18. a) $\langle 8, +\infty)$ b) $(-5, +\infty)$ c) $(-\infty, -5\rangle \cup (1, 8)$ d) $(-\infty, -3) \cup (4, 8)$
e) $(-\infty, -3) \cup \langle -2, +\infty)$ f) $(-5, -3)$
19. a) $A' = (4, +\infty)$ b) $B' = (-\infty, 1) \cup \langle 7, +\infty)$ c) $(A \cup B)' = \langle 7, +\infty)$
d) $(A \cap B)' = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ e) $B - A' = \langle 1, 4\rangle$ f) $(A - B)' = \langle 1, +\infty)$
20. a) 0 b) 6 c) np. $-\sqrt{2}$ d) np. 2
21. a) $\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2}$ b) $-1\frac{3}{4}; -\sqrt{2{,}25}; 2{,}(37); 2\frac{3}{8}$
22. a) np. $x = \frac{-5}{26}$ b) np. $y = \frac{3\sqrt{2}}{8}$
23. 0,6(67)
24. $A \cap B = \langle 1, 4\rangle$; do części wspólnej A i B należą liczby a, b, c
25. a) –1 b) $4\pi - 12{,}58$

26. poniedziałek
27. a) 21 b) 9 c) 3
28. a) 4 b) 2 c) 2 d) 1
29. a) $x \in \{-2, 2\}$ b) $x \in \{-1, 3\}$ c) $x \in \{0, 5\}$ d) równanie sprzeczne e) $x = 9$
f) równanie tożsamościowe, $x \in \boldsymbol{R}$ g) $x = -1{,}6$ h) $x \in \{-15, 15\}$ i) $x = -2$
30. a) $m = -\frac{2}{3}$ b) $m = -2\frac{3}{4}$
31. 56 oraz 58
32. $x \in (-\infty, -2)$; -2
33. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{12}\right\rangle$; 0
34. 1256,25
35. o $1\frac{1}{3}\%$
36. a) 7% b) 350 zł
37. „Pracowici" – wzrost poparcia o 14 punktów procentowych, czyli wzrost o 70%; „Grupa z fantazją" – spadek poparcia o 7 punktów procentowych, czyli spadek o 20%
38. $a = \frac{4}{11}$; $b = \frac{11}{30}$ a) $b > a$ b) $a \approx 0{,}36$; $b \approx 0{,}37$ c) $|a - 0{,}4| = \frac{1}{10}$; $|b - 0{,}4| = \frac{1}{11}$
39. 16
40. *wskazówka*: $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
41. 24 i 432 lub 48 i 216
42. 209 lub 419 lub 629 lub 839
wskazówka: Zauważ, że $x + 1 = 10k = 21n$, dla pewnych liczb naturalnych k, n. Oblicz $NWW(10, 21)$.
43. 193
44. $m \in \{-15, -5, -3, -1, 5, 15\}$
45. 17 dla $p = 2$; 13 dla $p = 3$; 11 dla $p = 5$

2. Wyrażenia algebraiczne

Potęga o wykładniku naturalnym

2.1. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3}$ b) $\frac{3^2}{4} > \left(\frac{3}{4}\right)^2$ c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\left(\frac{2}{5}\right)^3$ d) $-6^4 < (-6)^4$
e) $-\frac{1}{7^3} < -\left(-\frac{1}{7}\right)^3$ f) $-\frac{1}{2^0} = (-1)^{25}$
2.2. a) 1024 b) 0,000064 c) 2,5 d) 128 e) 0,0081 f) 64
2.3. a) 2,25 b) $\frac{-8}{125}$ c) $123\frac{37}{81}$ d) -8 e) $5\frac{4}{9}$ f) $-0{,}1$
2.4. a) 2^7 b) 2^{103} c) 2^{51} d) 2^{26} e) 2^{17} f) 2^6
2.5. a) 3^7 b) 3^4 c) 3^{18} d) 3^0 e) 3^{19} f) 3^2
2.6. a) 6 b) 8 c) 10 d) 7
2.7. a) $n = 6$ b) $n = 9$ c) $n = 4$ d) $n = 8$

2.8. a) $1{,}5 \cdot 10^2$ b) $1 \cdot 10^4$ c) $3{,}7 \cdot 10^4$ d) $4{,}231 \cdot 10^5$ e) $1{,}004 \cdot 10^1$ f) $2 \cdot 10^6$ g) $2{,}43 \cdot 10^{10}$ h) $4 \cdot 10^{12}$

2.9. a) 1 b) 1 c) $12\frac{4}{9}$ d) 0

2.10. a) $\frac{1}{7}$ b) 4 c) 36 d) 5625 e) 7 f) $\frac{1}{2}$

2.12. a) a^{16} b) a^2 c) a^{43}

2.13. a) 9 b) –3 c) –1 d) 1 e) 4 f) 3

2.14. a) $8x^3$; 216 b) $\frac{x^{14}}{3^7}$; 2187

Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej

2.16. a) 13 b) 25 c) –8 d) 49

2.17. a) 70 66 3,9 0,84 b) 10 –24 –0,7 2,4 c) 10 30 –6 6

2.18. a) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{7}{10}$ b) $\frac{-4}{5}$ $\frac{-2}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{7}{20}$ c) $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{-3}{10}$

2.19. a) $2\frac{1}{3}$ b) $1\frac{1}{9}$ c) $4\frac{1}{3}$ d) $2\frac{3}{4}$

2.20. a) 0,1 b) –0,6 c) –0,2 d) 0,3 e) 0,4 f) 0,9 g) 0,2 h) –0,25

2.21. a) 22 b) 1 c) –12 d) –5,8 e) 105 f) –16 g) 21 h) 0,9

2.22. a) 4 b) $\frac{2}{3}$ c) 3 d) 0,2

2.23. a) $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; $3\sqrt{7}$; $9\sqrt{2}$ b) $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{3}$; $5\sqrt[3]{4}$; $4\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{5}$
c) $2\sqrt[4]{4}$; $3\sqrt[4]{3}$; $2\sqrt[5]{10}$; $4\sqrt[5]{2}$; $2\sqrt[6]{9}$

2.24. a) $\sqrt{20}$; $\sqrt{54}$; $\sqrt{275}$; $\sqrt{68}$; $\sqrt{160}$ b) $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[3]{625}$; $\sqrt[3]{448}$; $\sqrt[3]{6000}$
c) $\sqrt[4]{1875}$; $\sqrt[4]{1024}$; $\sqrt[5]{192}$; $\sqrt[5]{1944}$; $\sqrt[7]{640}$

2.25. a) $5\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $9\sqrt{5}$ d) $3\sqrt{7}$ e) $24\sqrt{2} - 14\sqrt{3}$ f) $14\sqrt{5} + 10\sqrt{2}$
g) $7\sqrt{3} + 6\sqrt{6}$ h) $31\sqrt{2} - 14\sqrt{6}$

2.26. a) $1 + 2\sqrt{5}$ b) $2 - \sqrt{2}$ c) $\frac{-2+3\sqrt{7}}{4}$ d) $-1 - \sqrt{2}$ e) $-1 + 2\sqrt{2}$ f) –4
g) 2 h) $\frac{1}{2}$

2.27. a) 0 b) 5 c) –6 d) $3 - 4\sqrt{3}$ e) $-3\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{2}$ g) –1 h) $2\sqrt{5}$
wynik jest liczbą wymierną w przykładach: a), b), c), g)

2.28. a) $5\sqrt[3]{2}$ b) $12\sqrt[3]{3}$ c) $2\sqrt[4]{2}$ d) 0 e) $-10 + 11\sqrt[3]{2}$ f) 2 g) $34\sqrt[6]{2}$ h) $9\sqrt[3]{2}$

2.29. a) 15 b) 25 c) 9 d) 12 e) 55 f) 75 g) 36 h) 11

2.30. a) $\sqrt{2} - 1{,}4 > 1{,}4 - \sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - 1\frac{3}{4} < 1\frac{3}{4} - \sqrt{3}$ c) $3 - \sqrt[3]{-5} = \sqrt[3]{5} + 3$
d) $-1 - \sqrt[5]{-1} > \sqrt[5]{-2^5}$ e) $\sqrt{3} = \sqrt[4]{9}$ f) $2\sqrt[3]{2} > \sqrt[6]{128}$ g) $\sqrt{10} = \sqrt[6]{1000}$
h) $2 - \sqrt[5]{-7} > 2 - \sqrt[10]{(-7)^2}$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

2.31. a) $3x+2y$ b) $2\left(a+\frac{1}{2}b\right)$ c) $a-3(x+y)$ d) $(x-y)^2$ e) a^2+b^3 f) $(x^2-y^2)^3$

2.32. a) $a\cdot b^2$ b) $x^3\cdot\frac{x}{y}$ c) $\frac{a+b}{c-d}$ d) $ab-c^3$ e) $\sqrt{x+\frac{1}{2}y}$ f) $x\cdot y+\sqrt[3]{x^2+y^2}$

2.33. a) -1 b) $15m^2+m$ c) $-8a^3+20a^2-12a-8$ d) $4x^3y-10x^2y^2+xy$
e) $-2x^2+x-3,\ x\neq 0$ f) $1-3xy^2+4x^2y^3,\ x\neq 0$

2.34. a) $6x-7,\ x\neq 0;\ -5$ b) $2{,}5-6x,\ x\neq 0;\ -6{,}5$ c) $-5a^2+3a-2,\ a\neq 0;\ -2{,}8$
d) $b^2-7a^2b^3,\ a\neq 0$ i $b\neq 0;\ 60$

2.35. a) $xy-3x+y-3$ b) $-4xy-5x+8y+10$ c) $6x^2-35y^2+11xy$
d) $48x^2-y^2+13xy$ e) $2a^2-13a+21$ f) $-5b^2-6b+8$
g) $4y^4-5y^2-9$ h) $-5x^3+12x^2+2{,}5x-6$

2.36. a) $10x^2-25x-60$ b) $12a^2-10a-8$ c) $-5b^2+13b+6$ d) $-14y^2-86y+84$
e) $\frac{14}{3}x^2-8x-\frac{30}{7}$ f) $10a^2-a-3$ g) $\sqrt{2}y^2+2y-4\sqrt{2}$
h) $-2b^2+\left(2\sqrt{3}-1\right)b+\sqrt{3}$

2.37. a) $x^2-5xy-3y^2$ b) $x^2+3xy-12y^2$ c) $8xy-y+2y^2$ d) $-3x^2+y^2-2xy+x+y$
e) $6x^2-2y^2+xy+2x-y$ f) $-15x^2+12y^2+11xy-12x+16y$

2.38. a) $x^2+4xy+7y^2$ b) $-2xy+4x+2y-y^2$ c) $-7xy+5x-11y+15$ d) $x-5y^2$
e) $-14x^2+29x+21$ f) $20x^2+45x-91$

2.39. a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=2{,}8$ c) $x=-7$ d) równanie sprzeczne e) $x=2\frac{1}{4}$
f) $x=14$ g) $x\in\{-2,2\}$ h) $x\in\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$

2.40. a) $x\in\left\langle-\frac{1}{2},+\infty\right)$ b) $x\in(-\infty,-2)$ c) $x\in(-\infty,1\rangle$ d) $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{6}\right)$
e) $x\in\left\langle 7\frac{2}{3},+\infty\right)$ f) $x\in\left(-\infty,\frac{4}{7}\right)$ g) $x\in\langle-4,+\infty)$ h) $x\in\left\langle\frac{1}{3},+\infty\right)$

2.41. a) $-(3x^2+5y)$ b) $-(x-2y^2)$ c) $-(-2x-7y)$

2.42. a) $3(x-2)$ b) $4(3y+5x)$ c) $5x(-2x+1)$ d) $xy(x-y)$ e) $3a^2(3a-2b)$
f) $50a^2b(2ab+1)$ g) $4x^2y^3(3y-2x^2)$ h) $-7ab(3a^3-5b^4)$ i) $-24a^2x^3(3a^3x^2+1)$

2.43. a) $(a+b)(x+y)$ b) $(5-x)(a+b)$ c) $(2a+b)(y-6)$ d) $(4z+3)(x-1)$
e) $(10a-1)x(x-1)$ f) $2x(7b-5a)$ g) $(x-4)(3x-1)$ h) $(2y+3)(1+2y^2)$

2.44. a) $x(3x+7)(1-x)$ b) $y(4y+3)(y^2+1)$ c) $(a-b)(z-5)$ d) $x(2a-5b)(3+x)$
e) $(2x-1)(y-1+z)$ f) $(4-x)(x^2+x+1)$ g) $3x(7x-3)(x-2)$ h) $2y(y-3)(1-y)$

2.45 a) $(4x+3)(x-10)$ b) $2(3x+5)(x+2)$ c) $(x+1)(x-4)$ d) $(x-4)(4-x)$
e) $2(1-x)(x-1)$ f) $-4(3x-8)(x+10)$ g) $3(1-5x)(x-2)$ h) $6(5x+2)(x+1)$

2.46. a) $x\in\{-3,5\}$ b) $x\in\{-4,0\}$ c) $x\in\{0,5\}$ d) $x\in\{0,7\}$ e) $x\in\{-0{,}25;0\}$
f) $x\in\{0,4\}$

2.47. a) $x\in\{-7,3\}$ b) $x\in\{-1,2\}$ c) $x\in\{1,2\}$ d) $x\in\{-5,3\}$ e) $x\in\{-9,1\}$
f) $x\in\{-3,3\}$ g) $x\in\{1,2\}$ h) $x=4$

Wzory skróconego mnożenia

2.48. a) 144 b) 441 c) 361 d) 324 e) 1024 f) 9604 g) 10201 h) 2401

2.49. a) 9999 b) 896 c) 2491 d) 4899 e) 39996 f) 249984 g) 999991 h) 359600

2.50. a) 2440 b) 1065 c) 927 d) 335 e) 400 f) −405 g) 5050 h) 7208

2.51. a) $6+4\sqrt{2}$ b) $39+12\sqrt{3}$ c) $21+4\sqrt{5}$ d) $21+12\sqrt{3}$ e) $83+12\sqrt{35}$
f) $98+40\sqrt{6}$ g) $96+48\sqrt{3}$ h) $188+84\sqrt{5}$

2.52. a) $4-2\sqrt{3}$ b) $14-6\sqrt{5}$ c) $18-8\sqrt{2}$ d) $32-10\sqrt{7}$ e) $5-2\sqrt{6}$
f) $35-12\sqrt{6}$ g) $141-24\sqrt{30}$ h) $90-40\sqrt{5}$

2.53. a) −1 b) 2 c) 14 d) −2 e) 1 f) −4 g) −79 h) 591

2.54. a) $x^2+18x+81$ b) $64+16y+y^2$ c) $4a^2+12a+9$ d) $16x^2+40xy+25y^2$
e) $2+2\sqrt{2}b+b^2$ f) $9a^2+6\sqrt{3}a+3$

2.55. a) $25-10b+b^2$ b) $a^2-8a+16$ c) $9a^2-12ab+4b^2$ d) $49x^2-14x+1$
e) $8-20\sqrt{2}x+25x^2$ f) $2x^2-8xy+8y^2$

2.56. a) x^2-100 b) y^2-121 c) $16x^2-4y^2$ d) $1-5x^2$ e) $169x^2-196y^2$ f) $3a^2-6b^2$

2.57. a) x^4-14x^2+49 b) $16x^2-24xy+9y^2$ c) $4a^2+20ab+25b^2$ d) $49y^2-9x^2$ e) x^4-1
f) $36a^2-60ab+25b^2$ g) $3-9x^2$ h) $-25+10\sqrt{5}x-5x^2$ i) $-x^6-2\sqrt{2}x^3-2$

2.58. a) $1-x^4$ b) $2y^2+3$ c) $3z^2+22$ d) $42-2a^2$ e) $4a^2-4b^2-8ab$
f) $-15m^2+54m-10$ g) $-5x^2+12x+9$ h) $-2x^2+31x+4$

2.59. a) $8y-10y^2$; 1,5 b) $-16x^2+6x+2$; 2,44 c) $0{,}8a$; 40 d) $-20b^2-3$; −43
e) $-\frac{1}{4}a^2-4ab+1$; 1,19 f) $-42x+20$; 13 g) $9-4b^2$; $b\geqslant 0$; −3
h) $4-9x^2$; $x\geqslant 0$; −68

2.60. a) $x=-2$ b) $x=-1$ c) $x=2$ d) $x=-4$ e) $x=1$ f) $x=3$ g) $x=-\frac{1}{2}$ h) $x\in\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$

2.61. a) $x\in\langle -1,+\infty)$ b) $x\in\left\langle -9\frac{1}{2},+\infty\right)$ c) $x\in(1,+\infty)$ d) $x\in \boldsymbol{R}$
e) nierówność sprzeczna f) $x\in(2,+\infty)$ g) $x\in\left(-\sqrt{2},+\infty\right)$ h) $x\in\left(-\infty,\frac{2}{\sqrt{3}-2}\right\rangle$

2.62. a) $(x+1)^2$ b) $(3-x)^2$ c) $(2x+1)^2$ d) $(y-4)^2$ e) $(7+y)^2$ f) $(m-n)^2$

2.63. a) $(b-6)(b+6)$ b) $(7+y)(7-y)$ c) $(2x-5y)(2x+5y)$ d) $(m+4n)(m-4n)$
e) $\left(ab-\sqrt{2}\right)\left(ab+\sqrt{2}\right)$ f) $(3+x^2y)(3-x^2y)$

2.64. a) $(5p+3q+5)(5p+3q-5)$ b) $(2a+3b+c^2)(2a+3b-c^2)$ c) $(4m-9n)(-2m-9n)$
d) $(a-x-y)(a+x+y)$ e) $(2-2a+3b)(2+2a-3b)$ f) $(1-b^2-c^2)(1+b^2+c^2)$

2.65. a) $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x^2+5\right)$ b) $\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)\left(3+x^2\right)$ c) $(3x-1)(3x+1)(9x^2+1)$
d) $(2x-5)(2x+5)(4x^2+25)$ e) $(4x-3)(4x+3)(16x^2+9)$ f) $\left(x-\sqrt[4]{2}\right)\left(x+\sqrt[4]{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\right)$

2.66. a) $(x-1)^2(x+1)^2$ b) $(x^2+3)^2$ c) $(x-3)^2(x+3)^2$ d) $(2-x)^2(2+x)^2$
e) $(5-x)^2(5+x)^2$ f) $\left(x-\sqrt{5}\right)^2\left(x+\sqrt{5}\right)^2$

2.67. a) $(5a-b+2)(5a+b-2)$ b) $4(x+1)(2x-1)$ c) $3(x-4)(x+2)$
d) $(4x-11)(-2x-3)$ e) $(2x-11)(8x+1)$ f) $(9x-1)(13-5x)$

2.68. a) $2x(x-1)(x+1)$ b) $x(4-3x)(4+3x)$ c) $x(x-2)^2$ d) $x(x+1)^2$ e) $y(6+x)^2$
f) $2y(2x-1)^2$

2.69. a) $x=2$ b) $x \in \{-3, 3\}$ c) $x=-7$ d) $x \in \{-2, 2\}$ e) $x=5$
f) $x \in \left\{-\frac{9}{5}, \frac{9}{5}\right\}$ g) $x=-\frac{1}{8}$ h) $x \in \left\{-\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right\}$

2.70. a) $5\sqrt{3}-5$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{5}-1$ d) $-\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ e) $-1-\sqrt{2}$
f) $5-2\sqrt{5}$ g) $-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ h) $6-2\sqrt{6}$

2.71. a) $\frac{7+3\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{8-5\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$ d) $\frac{3\sqrt{6}-10}{23}$
e) $\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$ f) $7-4\sqrt{3}$ g) $\frac{13-4\sqrt{3}}{11}$ h) $-\frac{23+3\sqrt{5}}{22}$

2.72. a) tak b) nie c) tak d) tak e) nie f) tak

2.73. a) $3+2\sqrt{2}$ b) $-\frac{4}{13}-\frac{1}{13}\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\sqrt{5}$ d) $-\frac{1}{7}+\frac{3}{14}\sqrt{2}$
e) $\frac{3}{25}+\frac{1}{75}\sqrt{6}$ f) $-7-4\sqrt{3}$ g) $-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}$ h) $1-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

2.74. a) 1 b) -7 c) -5 d) 2 e) 12 f) 6

2.75. a) $(a-b)^2=1$, $|a+b|=7$ b) $ab=47{,}5$ oraz $(a-b)^2=35$
c) $a+b=18$, $a=10$, $b=8$ d) $ab=26$, $a^2-b^2=165$ lub $a^2-b^2=-165$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

2.76. a) $\frac{1}{5}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{256}$ b) $4\frac{17}{27}; \frac{1}{12}; 14; 36$ c) $10000; 37\frac{1}{27}; 25; -2\frac{1}{2}$
d) $\frac{4}{9}; -\frac{27}{343}; \frac{16}{169}; \frac{5}{21}$

2.77. a) 27 b) 16 c) 25 d) 36 e) 4 f) 8 g) 1 h) $\frac{1}{64}$

2.78. a) 9 b) $\frac{1}{625}$ c) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{8}$ e) $2\frac{1}{4}$ f) $\frac{4}{7}$ g) $2\frac{7}{9}$ h) $\frac{5}{13}$

2.79. a) $\frac{1}{9}$ b) 4 c) $\frac{1}{125}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $1\frac{7}{9}$ f) $\frac{25}{121}$ g) 17,64 h) $\frac{5}{17}$

2.80. a) 1 b) 1 c) $\frac{1}{216}$ d) $\frac{1}{64}$ e) $\frac{1}{64}$ f) $6\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{16}$ h) $\frac{1}{64}$

2.81. a) 5 b) $-0{,}75$ c) $0{,}25$ d) -2

2.82. a) $4{,}1 \cdot 10^3$ b) $1{,}015 \cdot 10^6$ c) $2{,}745 \cdot 10^8$ d) $9 \cdot 10^7$ e) $5 \cdot 10^{-2}$ f) $2{,}34 \cdot 10^{-1}$
g) $6{,}57 \cdot 10^{-5}$ h) $3{,}0405 \cdot 10^{-4}$

2.83. a) $1 \cdot 10^{19}$ b) $6 \cdot 10^1$ c) $1{,}4 \cdot 10^{16}$ d) $2{,}055 \cdot 10^0$ e) $4{,}42 \cdot 10^{-1}$ f) $2{,}15 \cdot 10^{-3}$
g) $5 \cdot 10^3$ h) $4 \cdot 10^{-4}$

2.86. a) $x^{-4}-3x^{-3}+5x^{-2}-2x^{-1}-1$ b) $-x^{-8}-2x^{-7}+3x^{-6}+6x^{-5}$
c) $3x^{-5}-3x^{-4}-2x^{-3}+3x^{-2}-3x^{-1}-2$ d) $-4x^{-7}+2x^{-6}+6x^{-4}-3x^{-3}-2x^{-1}+1$

2.87. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{5}{16}$

Potęga o wykładniku wymiernym

2.88. a) 2 b) 4 c) 9 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{1}{3}$

2.89. a) 25 b) 27 c) 16 d) $\frac{81}{16}$ e) $\frac{1}{27}$ f) $\frac{125}{27}$

2.90. a) 2 b) 625 c) 1,75 d) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

2.91. a) $18\frac{2}{3}$ b) –1463 c) –209 d) –35 e) $4+\sqrt{3}$ f) 0

2.92. a) $5^{\frac{7}{4}}$ b) $2^{\frac{8}{3}}$ c) $3^{\frac{5}{6}}$ d) $6^{\frac{9}{4}}$

2.93. a) 10 b) 11 c) 12 d) 23 e) 11 f) 7

2.94. a) $5^{2,5}$ b) $3^{1,25}$ c) $2^{5,5}$ d) $3^{1,5}$ e) $2^{2,6}$ f) $3^{\frac{8}{3}}$

2.95. a) $2^{\frac{11}{2}}$ b) 2^5

2.96. a) 5^{-8} b) $5^{\frac{7}{6}}$

2.97. a) $3^{\frac{5}{12}}$ b) 3^2

2.98. a) 21,54435 b) 2154,435 c) 0,2154435 d) 0,02154435

2.99. a) 177,8279 b) 0,17782794 c) 17782,79 d) 0,001778279

2.100. a) 2 b) 335 c) 29 d) –6

2.101. a) $8+4\sqrt{3}$ b) $15-10\sqrt{2}$ c) $14-8\sqrt{3}$ d) $357+98\sqrt{2}$

2.102. a) 12 b) 4 c) 22 d) 4

2.103. a) $\frac{2}{81}$ b) 100 c) 56 d) –294

Potęga o wykładniku rzeczywistym

2.104. a) 25 b) 7 c) 9 d) 25

2.105. a) 19683 b) 16384 c) $\frac{1}{128}$ d) 512 e) 0,00032 f) $\frac{1}{256}$

2.106. a) 128 b) 9 c) 125 d) 100000 e) 5 f) 0,1

Określenie logarytmu

2.107. a) 5 b) –5 c) 3 d) –4 e) –10 f) –3 g) 4 h) 0

2.108. a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=125$ c) $x=4$ d) $x=\sqrt{3}$ e) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ f) $x=1$ g) $x=1024$ h) $x=\frac{\sqrt{2}}{32}$

2.109. a) $x=5$ b) $x=3$ c) $x=9$ d) $x=8$ e) $x=3$ f) $x=\frac{1}{4}$ g) $x=3$ h) $x=\frac{1}{6}$

2.110. a) 2 b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $1\frac{1}{2}$ f) –4 g) $-\frac{1}{4}$ h) –2

2.111. a) $2\frac{2}{3}$ b) 9 c) $3\frac{1}{2}$ d) $-4\frac{1}{2}$ e) $1\frac{5}{8}$ f) $-2\frac{1}{2}$ g) $\frac{4}{3}$ h) $2\frac{1}{3}$

2.113. a) $a+b$ b) $a+2b$ c) $2a-b$ d) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$

2.115. a) 7 b) 4 c) 300 d) $3\frac{1}{5}$ e) $\frac{25\sqrt{6}}{6}$ f) $2\frac{2}{3}$ g) 36 h) $10\frac{2}{3}$

2.118. a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{a-b}{3}$

Zastosowanie logarytmów

2.119. a) 10^{-4} mol/dm^3 b) 1 mol/dm^3 c) ok. $3{,}16 \cdot 10^{-4}$ mol/dm^3
d) ok. $1{,}77 \cdot 10^{-9}$ mol/dm^3

2.120. a) zmniejszyć 100 razy b) zwiększyć 10 razy

2.121. pH zmalało o ok. 2,18 (dokładnie o log 150)

2.122. pH wzrosło o ok. 1,88

2.123. pH = 1,3

2.124. milion razy głośniej

2.125. o ok. 4,8 dB

Zdanie. Zaprzeczenie zdania

2.126. prawdziwe są zdania: a), b), e), f)

2.127. zaprzeczenia prawdziwe: a), b), d), e)

2.128. zaprzeczenia prawdziwe: b), c), f)

2.129. a) $2-\sqrt{5}>0$ – zdanie fałszywe; zaprzeczenie: $2-\sqrt{5}\leq 0$

b) $\sqrt{(-1)^2}\geq 0$ – zdanie prawdziwe

c) zaprzeczenie: $2^3\leq 3^2$

d) zaprzeczenie: $\sqrt{0}=0$

e) zaprzeczenie: $\sqrt[3]{-8}<(-5)^0$

f) $4:(-2)\geq 4\cdot(-2)$ – zdanie prawdziwe

g) zaprzeczenie: $(2+5)^2>2^2+5^2$

h) $\neg[(0{,}5)^2\leq(0{,}3)^2]$, czyli $(0{,}5)^2>(0{,}3)^2$ – zdanie prawdziwe

2.130. a) $\bigwedge\limits_{x\in \boldsymbol{N}} x\geq 0$ – zdanie prawdziwe b) $\bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{R}} x+\frac{1}{x}=2$ – zdanie prawdziwe

c) $\bigwedge\limits_{x\in \boldsymbol{R}} x^2+1>0$ – zdanie prawdziwe d) $\bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{Z}} x^3<0$ – zdanie prawdziwe

e) $\bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{N}} x^2-3<-1$ – zdanie prawdziwe f) $\bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{Z}} x^2=\sqrt{3}$ – zdanie fałszywe

2.131. zdania prawdziwe: a), c), f); zaprzeczenie zdania a): $\bigvee\limits_{x\in \boldsymbol{R}} x^2+2\leq 0$

zaprzeczenie zdania b): $\bigwedge\limits_{x\in \boldsymbol{R}} x^2\neq -1$

zaprzeczenie zdania c): $\bigwedge\limits_{x\in \boldsymbol{N}} \frac{1}{x}\notin \boldsymbol{N}$

zaprzeczenie zdania d): $\bigwedge_{x \in Q} 5x \in Q$

zaprzeczenie zdania e): $\bigvee_{x \in Z} \sqrt{x^2} \neq x$

zaprzeczenie zdania f): $\bigvee_{x \in R} x^2 \neq |x|^2$

Zdanie złożone. Zaprzeczenia zdań złożonych

2.132. zdania prawdziwe: b) i d)
2.133. koniunkcje prawdziwe: a), d), f)
2.134. zdania prawdziwe: a), b), d)
2.135. alternatywy prawdziwe: b), c)
2.136. zdania prawdziwe: a), e)
2.137. zadania prawdziwe: b), c)
2.138. zdania prawdziwe: b), c)
2.139. zdania prawdziwe: b), c), d), e)
2.140. zdania prawdziwe: a), b), e), f)
2.141. zdania prawdziwe: a), b), e)
2.142. zaprzeczenia prawdziwe: b), c), d)
2.143. zaprzeczenia prawdziwe: c), d), e), g)
2.144. a) $3 \cdot 2 > 5 \cdot 2 \wedge 3 \cdot (-2) < 5 \cdot (-2)$; zaprzeczenie fałszywe
b) $3 + 3 \neq 3 \cdot 3 \wedge 2 + 2 = 2 \cdot 2$; zaprzeczenie prawdziwe
c) $3 \leq \sqrt{10} \wedge -\sqrt{10} \geq -3$; zaprzeczenie fałszywe
d) $10^2 = 100 \wedge (-10)^2 = 100 \wedge 10 \neq -10$; zaprzeczenie prawdziwe
e) $\sqrt{2} \leq \sqrt{7} \wedge \sqrt{2} \geq 1{,}4 \wedge 7 \nmid 85$; zaprzeczenie prawdziwe
f) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 = 216 \wedge [(-2)^3 \geq 108 \vee (-3)^3 \leq 108]$; zaprzeczenie prawdziwe
g) $6 \geq 4 \wedge 6 : (-4) < -1 \wedge 6 \cdot 0 = 4 \cdot 0$; zaprzeczenie prawdziwe
h) $-3 < -2 \wedge \left(-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2} \vee -3 + \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2}\right)$; zaprzeczenie prawdziwe

2.145. a) zdanie prawdziwe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in R} x^2 + 2 \leq 0$

b) zdanie prawdziwe; zaprzeczenie: $\bigwedge_{x \in R} x \geq 2$

c) zdanie prawdziwe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in N} \left(\sqrt{x} < 0 \wedge x \geq 0\right)$

d) zdanie fałszywe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in N} \left(\sqrt{x} \neq 4 \wedge x^2 \neq 16\right)$

e) zdanie fałszywe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in Z} (x < 5 \vee x > 5)$

f) zdanie fałszywe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in R} \left(x \geq \sqrt{2} \wedge x \leq \sqrt{2}\right)$

g) zdanie prawdziwe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in R} (x \leq 0 \wedge x > 0)$

h) zdanie fałszywe; zaprzeczenie: $\bigvee_{x \in R} \left(x^2 \neq 2 \vee x \geq 0\right)$

Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia

2.146. twierdzenia prawdziwe: c), e), f), g) twierdzenia odwrotne do danych są prawdziwe w przypadku a), c), d), f), h)

2.148. Twierdzenie $p \Rightarrow q$ jest prawdziwe w przypadku: a), b), d), f), g), h) twierdzenie $q \Rightarrow p$ jest prawdziwe w przypadku a), c), d), e), f), g) równoważność jest prawdziwa w przypadku: a), d), f), g)

2.149. Twierdzenie odwrotne do danego jest prawdziwe w przypadku b) i c).

2.162. Z założeń wynika, że $2a > 6$ i $3b > 12$. Zatem $2a + 3b > 6 + 12$. Po podzieleniu otrzymanej nierówności stronami przez 6 otrzymujemy tezę.

2.164. Z założenia wynika, że $a > b$ i $a > c$, zatem $2a > b + c$. Po podzieleniu otrzymanej nierówności stronami przez 2 otrzymujemy tezę.

2.165. a) *wskazówka:* $x^2 + 2xy + 3y^2 = (x + y)^2 + 2y^2$

b) *wskazówka:* $2x^2 + 25y^2 - 10xy = x^2 + (x - 5y)^2$

2.166. a) *wskazówka:* $a - 8 + \dfrac{17}{a} = \dfrac{a^2 - 8a + 16 + 1}{a} = \dfrac{(a-4)^2 + 1}{a}$

2.168. Z założenia wiemy, że

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$.

Mnożymy równość stronami przez 2 i grupujemy wyrazy lewej strony równości:

$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = 0$. Zatem

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$, stąd $a = b = c$.

2.172. Z faktu, że $(a - b)^2 \geq 0$ wynika, że $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Z założenia mamy $ab > 5$, więc $2ab > 10$, skąd również $a^2 + b^2 > 10$.

2.173. *wskazówka:* Zauważ, że $(a + b)^2 \geq 0$ dla $a, b \in \boldsymbol{R}$. Następnie skorzystaj z odpowiedzi do zadania 2.172.

Przekształcanie wzorów

2.175. a) $m = \dfrac{V}{d}$, $V = d \cdot m$ d) $K = \alpha^2 \cdot c$, $c = \dfrac{K}{\alpha^2}$

2.176. a) $x_0 = x - v \cdot t$, $t = \dfrac{x - x_0}{v}$ c) $m_r = \dfrac{(100\% - C_p) \cdot m_s}{C_p}$, $m_s = \dfrac{C_p \cdot m_r}{100\% - C_p}$

d) $v_1 = \dfrac{(m_1 + m_2) \cdot v_3 - m_2 \cdot v_2}{m_1}$, $v_3 = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$, $m_1 = \dfrac{(v_3 - v_2) \cdot m_2}{v_1 - v_3}$

2.177. b) $a = \sqrt{\dfrac{4P}{\sqrt{3}}}$ d) $a = \sqrt[3]{6 \cdot \sqrt{2} \cdot V}$

2.178. c) $a = \dfrac{P - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b + c)}$ d) $a = \sqrt{4P + c^2} - b$, $c = \sqrt{(a + b)^2 - 4P}$

Średnie

2.179. a) $S_a = 5$, $S_g = 4$ b) $S_a = 7$, $S_g = 4$ c) $S_a = 12{,}5$ $S_g = 12$ d) $S_a = S_g = 3$

2.180. a) 3,50 b) 45,22% c) 54,78%

2.181. a) ta osoba może spodziewać się czwórki b) ta osoba może spodziewać się trójki

2.182. 24,75 zł

2.183. 56%

2.184. a) 2209,6 zł b) 36,4% c) 38,1%

2.185. 28,7%
2.186. 45 lat
2.187. 42 lata
2.188. 3094 zł
2.189. 2,99%
2.190. 6,16%
2.191. pierwsza ciężarówka szybciej osiągnęła cel, bo większą część drogi jechała z prędkością 50 km/h (pierwsza $\frac{5}{9}S$, druga $\frac{1}{2}S$)

2.192. $58\frac{1}{3}$ km/h
2.193. 48 km/h
2.194. 55 km/h

2.195. 1. przypadek: $a + b < 0$. Wówczas $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > 0$ i $\frac{a+b}{2} < 0$, więc nierówność $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ jest prawdziwa.

2. przypadek: $a + b \geq 0$. Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a+b}{2}$. Obie strony nierówności są nieujemne, więc można je podnieść do kwadratu: $\frac{a^2+b^2}{2} < \frac{(a+b)^2}{4}$, czyli $\frac{2a^2+2b^2}{4} < \frac{(a+b)^2}{4}$, skąd $2a^2 + 2b^2 < (a + b)^2$.
Po przekształceniu ostatniej nierówności otrzymujemy $a^2 - 2ab + b^2 < 0$, czyli $(a - b)^2 < 0$. Uzyskaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że nierówność $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ jest prawdziwa, jeśli $a + b \geq 0$.

2.196. *wskazówka*: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}}{2}$

2.197. *wskazówka*: Z zadania 2.196 wynika, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to $2\sqrt{ab} \leq a+b$, stąd $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1$. Mnożymy ostatnią nierówność stronami przez $\sqrt{ab}$ i otrzymujemy $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$, skąd $\frac{2}{\frac{a+b}{ab}} \leq \sqrt{ab}$.

Test sprawdzający do rozdziału 2.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**B**	**A**	**B**	**B**	**D**	**C**	**D**	**D**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**C**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**D**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 2.

16. a) $x = \frac{1}{6}$ b) $x = 1\frac{3}{4}$

17. a) -80 b) 1 c) $-116\frac{2}{3}$ d) $-5\sqrt{2}$

18. $-7+4\sqrt{3}$

19. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$

20. a) $30y^2 - x^2$; 21 b) $2b^2 + a$; 6 c) $-\frac{1}{4}a^2 - 4ab + 1$; $\frac{79}{100}$ d) $8x^2$; 2

21. a) 3 b) $-\frac{1}{3}$ c) 4 d) 3

22. a) 2 b) 5 c) 1 d) 2

23. a) $x \in (0, +\infty)$ b) $x \in (-\infty, 2\rangle$ c) $x \in \left(\frac{5}{18}, +\infty\right)$ d) $x \in \langle 0, +\infty)$

24. a) $(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)(3+x^2)$ b) $2(x-4)^2$ c) $(5-2x+2y)(5+2x-2y)$
d) $(2x-1)(1+y)$

25. y^{10}; $128\sqrt{2}$

26. w każdym przypadku $x > y$

27. a) 2 b) 4 c) $10\frac{1}{2}$ d) 125

28. a) 3,1623 b) 316,23

29. $3\frac{4}{9}$

30. a) $a-b$ b) $2a-4b$ c) $\frac{a-2b}{5}$ d) $\frac{2+b}{a-2b}$

31. 7

32. średnio liczba ludności malała o 0,05%

41. a) 2 b) $2(1+\sqrt{2})$

42. Po wyznaczeniu y z drugiego równania i podstawieniu zależności do pierwszego równania otrzymujemy $x^2 + (2-x)^2 = 2$, stąd $2x^2 - 4x + 4 - 2 = 0$, więc $(x-1)^2 = 0$. Z tego wynika, że $x = 1$ oraz $y = 2 - 1 = 1$.

3. Funkcja i jej własności

Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Sposoby opisywania funkcji

3.1. funkcje opisują grafy: b), d)

3.2. funkcjami są przyporządkowania: a), c), d)

3.4. b) nie

3.5. 1) funkcją jest przyporządkowanie z przykładu a)
2) $D = \{-3, -2, -1, 2, 4\}$, $ZW = \{0, 2, 3, 4\}$

3.6. a) $f(-4) = 9, f(-3) = 3, f(-2) = 1, f(-1) = \frac{1}{3}$

b)

x	-4	-3	-2	-1
$f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$

3.7. a) $f\left(\frac{1}{8}\right) = -3,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, f(1) = 0, f(4) = 2, f(32) = 5$

b) $\left\{\left(\frac{1}{8}, -3\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1, 0), (4, 2),\ (32, 5)\right\}$

3.8. a) Funkcja f każdej liczbie ze zbioru $\left\{\frac{1}{2}; 1,5; 0,25; 5; 1\frac{1}{3}\right\}$ przyporządkowuje jej odwrotność. b) $f(x) = \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, 5, 1\frac{1}{3}\right\}$

3.9. a) -2 oraz 2 b) -1 c) $g(x) = -x^2$, gdzie $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3.10. a) $\{(-4, 4), (-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$

b) $D_f = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ c) $ZW_f = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $f(x) = -x,\ x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

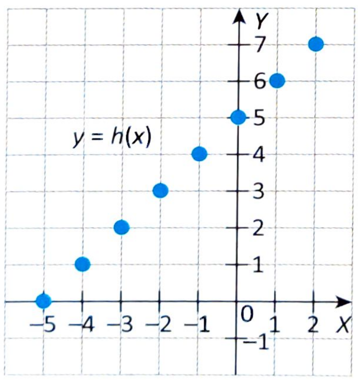
3.11. a) w górnym wierszu kolejno: 1, 2, 3; w dolnym wierszu kolejno: 3, 2, 1

b) Funkcja g każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ przyporządkowuje jej wartość bezwzględną.

c) $g(x) = |x|,\ x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

3.12. a) 5 b) -3 c) $h(x) = x + 5,\ x \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

d)

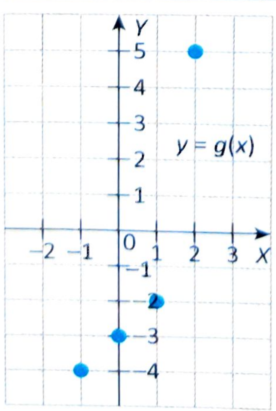


3.13. a) $g(x) = x^3 - 3, x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

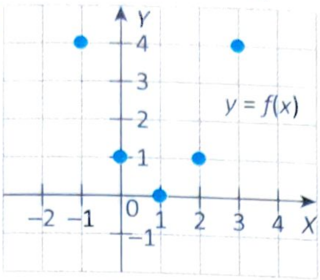
b)

x	-1	0	1	2
$g(x)$	-4	-3	-2	5

c)



3.14. a) $\{(-1, 4), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (3, 4)\}$ b) $f(x) = (x-1)^2,\ x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
c) -1 oraz 3 d)



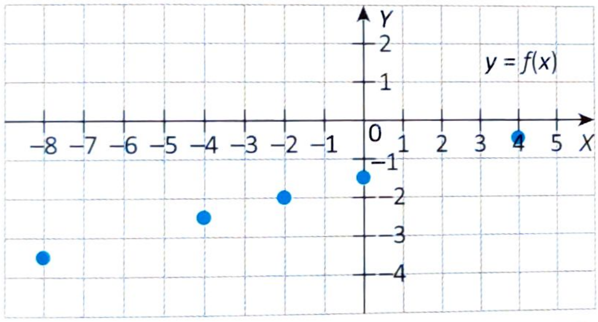
3.15. a) $\frac{1}{6}$ b) Funkcja g każdej liczbie ze zbioru $\{0, 1, 4, 9, 16\}$ przyporządkowuje liczbę przeciwną do pierwiastka kwadratowego z tej liczby.
c) $g(x) = -\sqrt{x},\ x \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$

3.16. a)

x	-18	$-4\frac{1}{2}$	0,75	1,5	9
$f(x)$	16	7	3,5	3	-2

b) $D_f = \left\{-18, -4\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 9\right\}$; $ZW_f = \left\{-2, 3, 3\frac{1}{2}, 7, 16\right\}$ c) $-24{,}5$

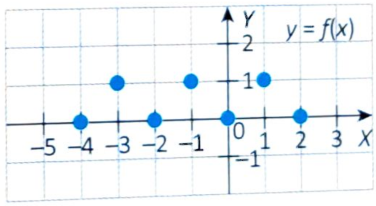
3.17. a) $f(x) = \frac{1}{4}(x-6),\ x \in \{-8, -4, -2, 0, 4\}$ b) $ZW_f = \left\{-3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}, -2, -1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$
c) -2 d)



3.18. a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	0	1	0	1	0

b)



c) $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1, 1\}$

3.19. a) $f(x) = 2(x+3),\ x \in \mathbf{Z}$ b) -96 c) 1 d) nie, bo liczba $-\frac{1}{2}$ nie należy do dziedziny funkcji h

3.20. b) 3 c) trzy: (5, 3), (7, 5), (13, 11)

3.21. a) $f(x) = x^2 + 5,\ x \in \boldsymbol{R}$ b) $f\left(-2\sqrt{3}\right) = 17$ i $f\left(2\sqrt{3}\right) = 17$ c) A należy, B nie należy

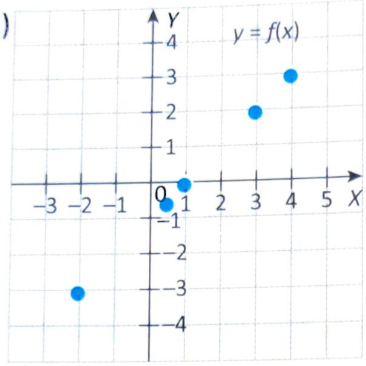
3.22. *wskazówka*: Oblicz wartość funkcji f dla argumentu a. Zauważ, że $f(a) = (2a-5)^2$.

Wykres funkcji

3.23. Wykres funkcji zmiennej x jest przedstawiony na rysunkach: a), c), e).

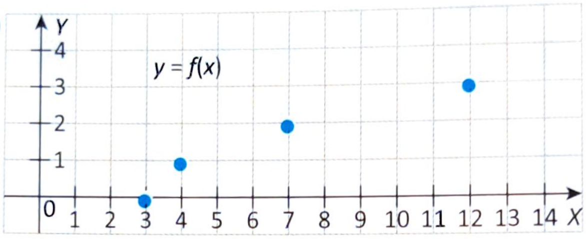
3.24. a) 1) (0, 0) 2) (0, 0), (2, 0) b) 1) (0, −3) 2) (−5, 0), (−2, 0), (1, 0)
c) 1) (0, 2) 2) (1, 0), (4, 0)

3.25. a)



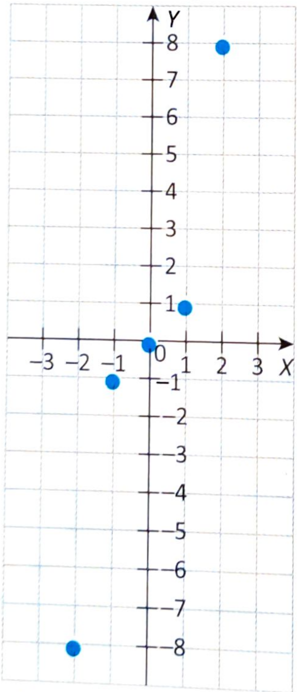
b) $f(x) = x - 1$, gdzie $x \in \left\{-2, \frac{1}{2}, 1, 3, 4\right\}$

3.26. a)

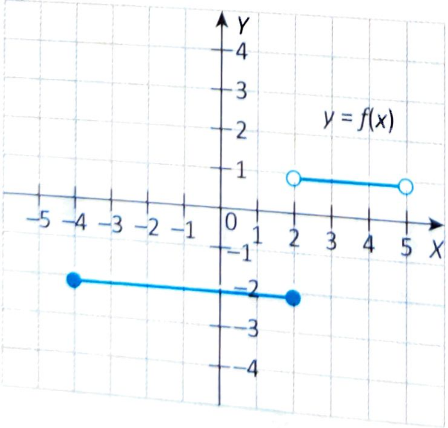


b) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $x \in \{3, 4, 7, 12\}$

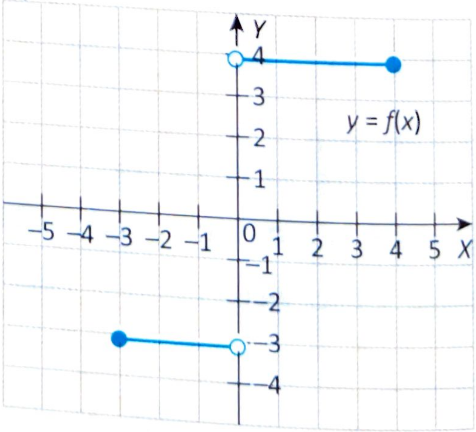
3.27. $f(x) = x^3$, $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$



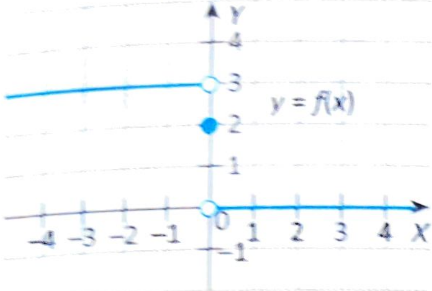
3.28. a)



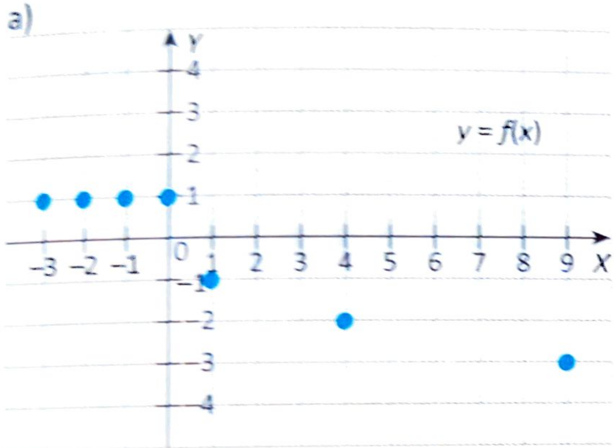
b)



3.29. a) $f(x)=\begin{cases} 3, & \text{jeśli } x\in(-\infty,0) \\ 2, & \text{jeśli } x=0 \\ 0, & \text{jeśli } x\in(0,+\infty) \end{cases}$ b) 1) $(0, 2)$ 2) $(x, 0)$, gdzie $x \in (0, +\infty)$

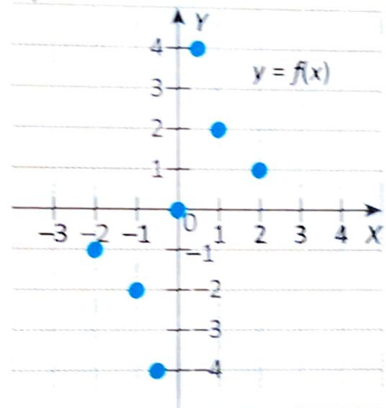


3.30. a)



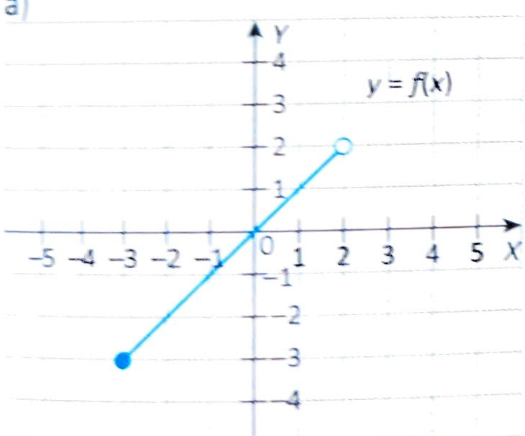
$(0, 1)$

b)

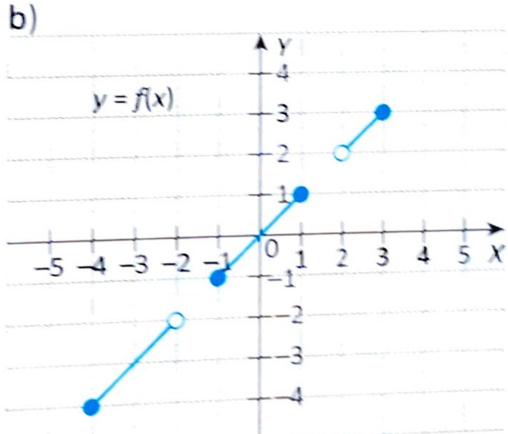


$(0, 0)$

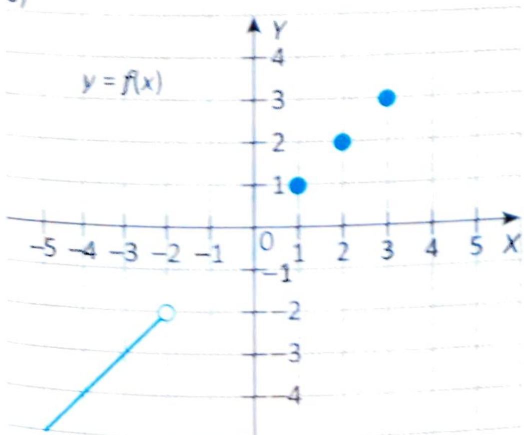
3.31. a)



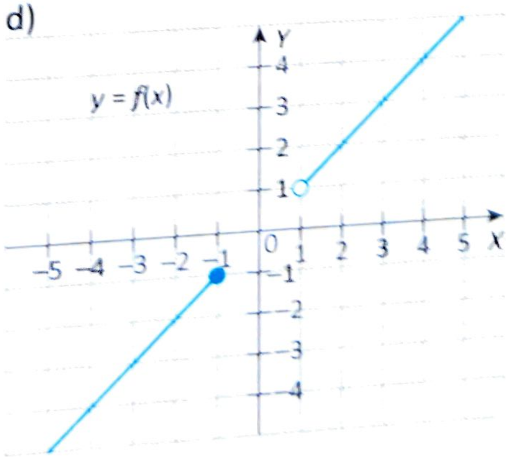
b)



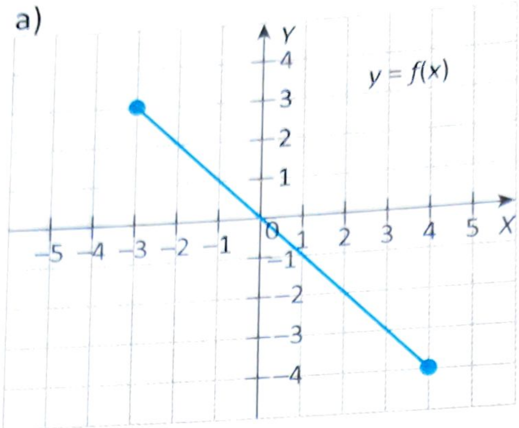
c)



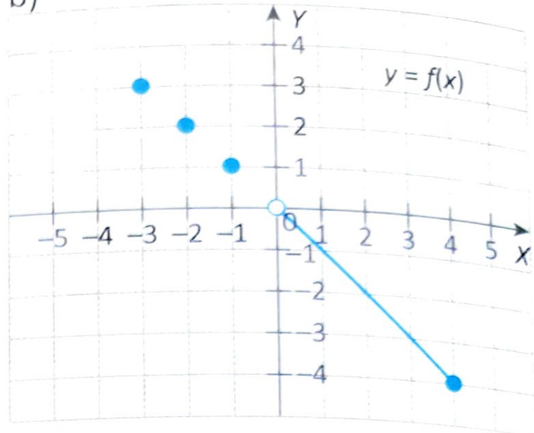
d)



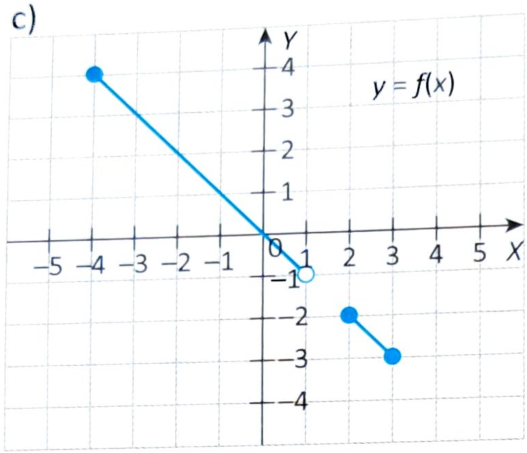
3.32. a)



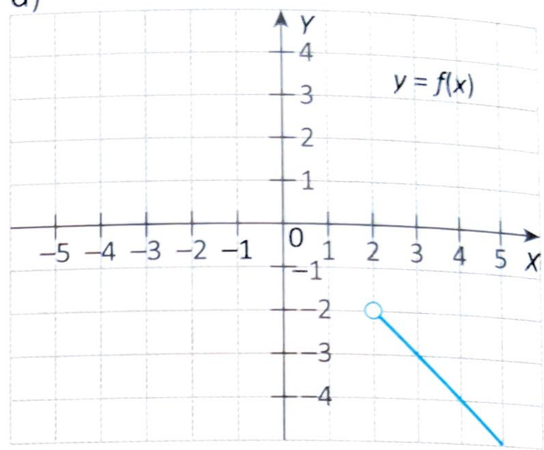
b)



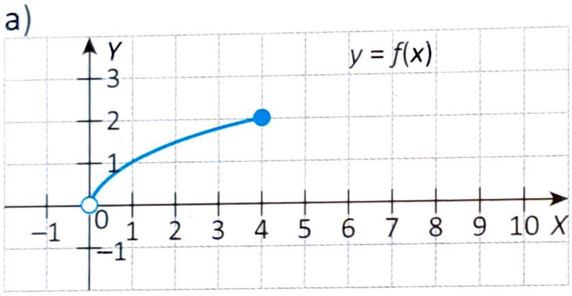
c)



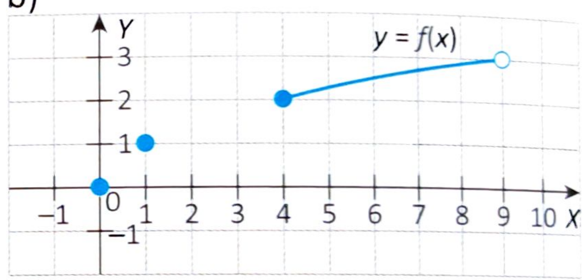
d)



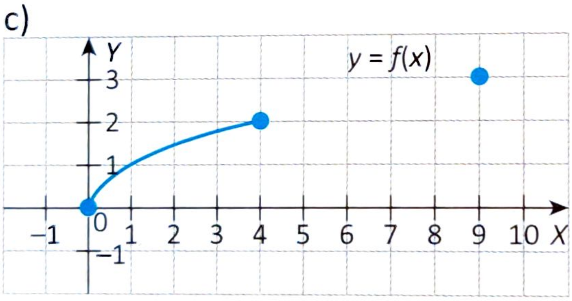
3.33. a)



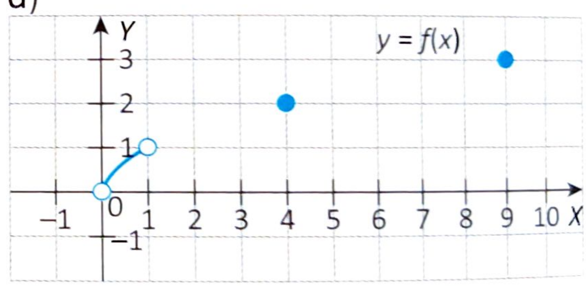
b)



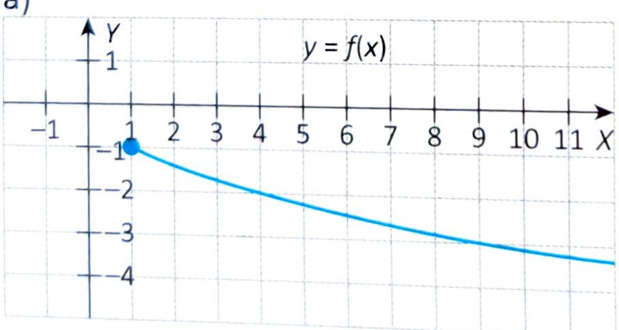
c)



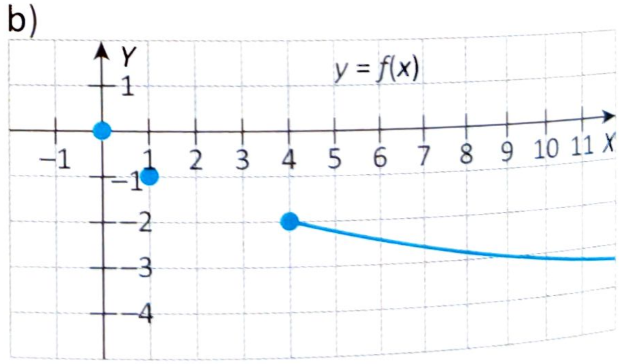
d)



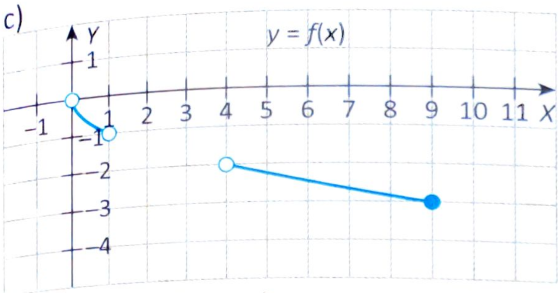
3.34. a)



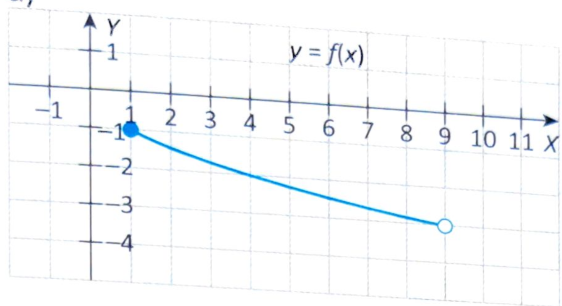
b)



c)



d)



35. a) z osią $OX: \left(3\frac{1}{2}, 0\right)$, z osią $OY: \left(0, -2\frac{1}{3}\right)$

b) z osią $OX: (4, 0)$, z osią $OY: (0, 8)$

c) z osią $OX: (1, 0), (-2, 0)$, z osią $OY: (0, -8)$

d) z osią $OX: (-5, 0)$, z osią $OY: (0, 25)$

e) z osią $OX: (6, 0)$, z osią $OY: (0, 36)$

f) $OX: \left(-1\frac{1}{2}, 0\right), \left(1\frac{1}{2}, 0\right)$, $OY: (0, -9)$

36. a) z osią $OX: (-4, 0)$, z osią $OY: (0, -8)$

b) z osią OX : brak, z osią $OY: (0, 10)$

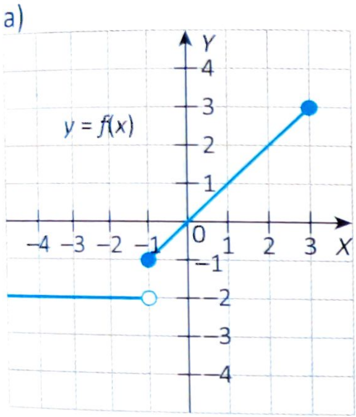
c) z osią $OX: (4, 0)$, z osią $OY: (0, -20)$

d) z osią $OX: (-2, 0)$, z osią $OY: (0, 4)$

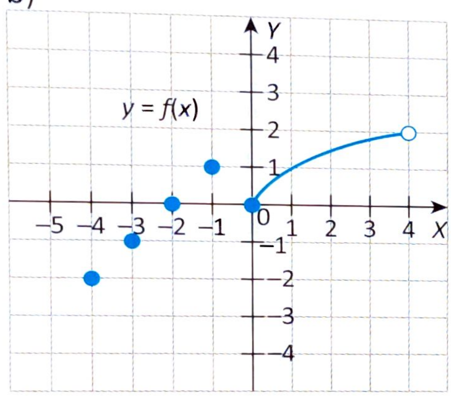
e) z osią $OX: (4, 0)$, z osią OY : brak

f) z osią OX: brak, z osią $OY: (0, 1)$

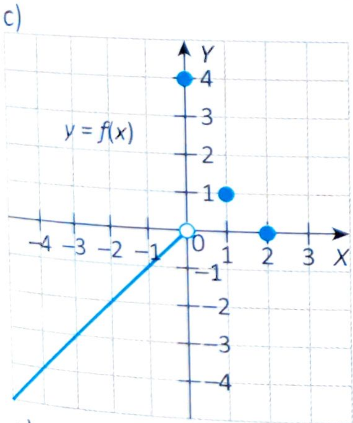
37. a)



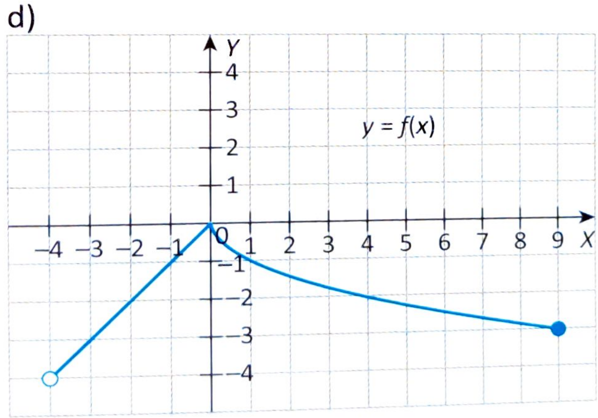
b)



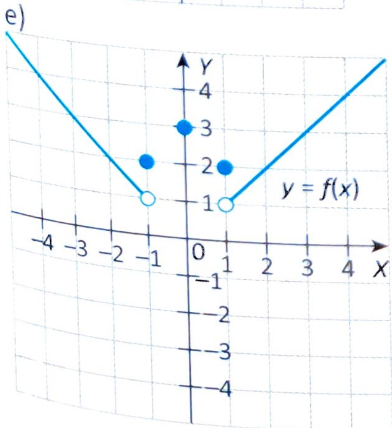
c)



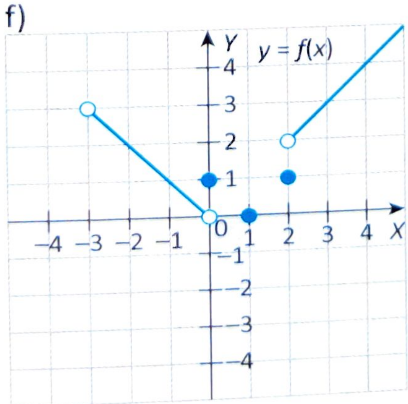
d)



e)



f)



3.38. a) A i C b) tylko C c) tylko A d) B i C

3.39. a) $a=\frac{1}{5}$ b) $a=-3$ c) $a=2$ d) $a=19$

3.40. a) $(0, 8)$ b) 15 c) $-2,\ 2\frac{1}{2}$ d) należy

3.41. a) A, B i C b) A i C

3.42. a) $(-8, 0), (-2, 0), (-1, 0)$ b) $(-3\sqrt{3}, 0), (2, 0)$

Dziedzina funkcji liczbowej

3.43. a) $D_f=\langle -4, 4)$ b) $D_f=(-3, 3\rangle$ c) $D_f=\langle -2, 5)$ d) $D_f=\langle -5, 6\rangle$
e) $D_f=\{-4, -3\}\cup\langle -2, 2\rangle$ f) $D_f=(-3, -1\rangle\cup(0, 4\rangle$

3.44. a) $D_f=\langle -5, 5)-\{-4\}$ b) $D_f=(-4, -3\rangle\cup\langle -2, 1)\cup(1, 4\rangle$
c) $D_f=\{-4, -3\}\cup\langle -2, 2\rangle\cup\langle 3, 5\rangle$ d) $D_f=(-3, 2)\cup\langle 3, 8)$
e) $D_f=(-6, -3)\cup\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ f) $D_f=\langle -4, -2\rangle\cup\langle -1, 1\rangle\cup\{-5, 2, 3\}$

3.46. a) $D_f=\boldsymbol{R}$ b) $D_f=\boldsymbol{R}-\{0\}$ c) $D_f=\boldsymbol{R}$ d) $D_f=\boldsymbol{R}-\{2\}$ e) $D_f=\boldsymbol{R}$ f) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{2\frac{2}{3}\right\}$

3.47. a) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-3, 1\}$ b) $D_f=\boldsymbol{R}$ c) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-8, 0\}$ d) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{5}, 1\frac{1}{3}\right\}$

e) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-5, 0, 9\}$ f) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-7\}$

3.48. a) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$ b) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right\}$ c) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-4, 4\}$

d) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right\}$ e) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right\}$ f) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-3, 3\}$

3.49. a) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{1}{2}\right\}$ c) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ d) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

e) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-1\frac{1}{3}\right\}$ f) $D_f=\boldsymbol{R}-\{7\}$

3.50. a) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-1, 1\}$ b) $D_f=\boldsymbol{R}-\{-3, 1, 3\}$ c) $D_f=\boldsymbol{R}$ d) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-5\frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5\frac{1}{2}\right\}$

e) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-5, -3\frac{1}{2}, 0\right\}$ f) $D_f=\boldsymbol{R}-\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\frac{1}{2}\right\}$

3.51. a) $D_f=\langle 8, +\infty)$ b) $D_f=(-\infty, 2\rangle$ c) $D_f=(-\infty, 3)$ d) $D_f=(-9, +\infty)$
e) $D_f=\left(2\frac{1}{2}, +\infty\right)$ f) $D_f=\langle -2, 7)$

3.52. a) $D_f=\langle -2, 0)\cup(0, +\infty)$ b) $D_f=(3, +\infty)$ c) $D_f=\langle -4, 2)$
d) $D_f=(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, 3\rangle$ e) $D_f=(-\infty, -1)\cup(-1, 2\rangle$ f) $D_f=(-2, 3)$

3.53. a) $D_f=\langle -2, 0)\cup(0, 5)$ b) $D_f=\langle 1, 8)$ c) $D_f=(-\infty, -3)\cup\left(-3, 3\frac{1}{2}\right\rangle$

d) $D_f=(3, 6)\cup(6, +\infty)$ e) $D_f=(2, 4\rangle$ f) $D_f=(-\infty, -2)\cup(-2, 2)\cup\left(2, 3\frac{1}{2}\right)$

3.54. a) $a=-2$ b) $a=-9$ c) $a=\frac{-1}{5}$ d) $a=\frac{1}{3}$

Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji

3.55. a) $ZW_f=\{\sqrt{3}\}$ b) $ZW_f=\{-13, -3, -1\}$ c) $ZW_f=\{1, 3, 5, 7\}$

d) $ZW_f=\left\{-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, 1, 1\frac{1}{2}\right\}$ e) $ZW_f=\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}\right\}$

f) $ZW_f=\left\{-14, -2, 2, 3\frac{1}{3}, 3\frac{7}{9}\right\}$

3.56. $ZW_f=\{0, 1, 2, 3\}$

3.57. $ZW_f=\{0, 3, 4\}$

3.58. a) $ZW_f=\langle -3, 4\rangle$; największą wartość równą 4 funkcja przyjmuje dla argumentu (-2), najmniejszą wartość równą (-3) funkcja przyjmuje dla $x\in\langle 3, 6)$

b) $ZW_f=\langle -4, 4\rangle$; największą wartość równą 4 funkcja przyjmuje dla argumentu (-2), zaś najmniejszą równą (-4) funkcja przyjmuje dla argumentu 3

c) $ZW_f=\langle -2, 2\rangle$; największą wartość równą 2 funkcja przyjmuje dla $x\in(-\infty, -2\rangle$, zaś najmniejszą wartość równą (-2) dla $x\in\langle 2, +\infty)$

d) $ZW_f=\langle 1, 3)$; funkcja nie przyjmuje wartości największej, najmniejszą wartość równą 1 funkcja przyjmuje dla argumentów (-5) oraz 3

e) $ZW_f=\langle -3, 2\rangle\cup\{3\}$; funkcja przyjmuje największą wartość równą 3 dla argumentu (-3), zaś najmniejszą wartość równą (-3) dla argumentu 0

f) $ZW_f=\langle -3, -1\rangle\cup(1, 3)$; funkcja nie przyjmuje wartości największej, najmniejszą wartość równą (-3) funkcja przyjmuje dla argumentu 1

3.59. a) $D_f=(-5, 3\rangle$ b) $ZW_f=(1, 5\rangle$ c) 3 d) 0 oraz 2

3.60. a) $D_f=(-\infty, 4\rangle$ b) $ZW_f=(-\infty, -2)\cup\langle 0, 2\rangle$ c) -3 d) 4

3.61. a) $D_f=\boldsymbol{R}$ b) $ZW_f=\boldsymbol{R}$ c) 8 d) -4 oraz -1

3.62. a) $D_f=\{-5\}\cup\langle -4, 2\rangle$ b) $ZW_f=(-2, 4\rangle$ c) $f(-4)=1, f(1)=3$ d) -5 oraz 0

3.63. a) $D_f=(-5, 6\rangle$ b) $ZW_f=(-2, 0)\cup\langle 1, 4\rangle$ c) 6 d) 4

3.64. a) $D_f=\langle -7, +\infty)$ b) $ZW_f=\langle -2, +\infty)$ c) 3 d) $\{-4\}\cup\langle -1, 4\rangle$

3.65. a) $D_f=(-9, 2\rangle\cup\langle 3, 12\rangle$, $ZW_f=\langle -6, 5\rangle$ b) OX: (1, 0), (8, 0), (11, 0); OY: (0, –2)
c) najmniejszą wartość równą -6 funkcja przyjmuje dla argumentu -2, największą wartość równą 5 funkcja przyjmuje dla argumentu 3 d) 1) $x\in\{2, 6, 12\}$, 2) 10

3.66. a) $D_f=(-\infty, -4\rangle\cup\{-3, -2\}\cup\langle -1, 11)$, $ZW_f=\langle -4, +\infty)$ b) OX: (1, 0), (9, 0); OY: (0, 3)
c) najmniejszą wartość równą -4 funkcja przyjmuje dla argumentu 5, wartości największej funkcja nie przyjmuje d) 1) $x\in\langle -8, -4)\cup\{2, 8\}$; 2) $4\frac{1}{2}$

3.67. a) $ZW_f=(-2, +\infty)$ b) $ZW_f=\langle -3, 1)\cup\langle 2, 4)$ c) $ZW_f=(-5, 4\rangle$
d) $ZW_f=(-\infty, 1)$ e) $ZW_f=(0, 2\rangle$ f) $ZW_f=(-\infty, -1\rangle$

3.68. 5

3.69. -2

3.70. a) nie b) tak c) tak d) nie

3.71. a) tak b) tak c) nie d) nie

3.73. *wskazówka*: Wykaż, że $f(x)\geq -9$ dla $x\in\boldsymbol{R}$ i wskaż argument, dla którego funkcja f przyjmuje wartość równą -9.

3.74. *wskazówka*: Zauważ, że $f(x)=-(4x^2-4x+1)+3=-(2x-1)^2+3$.

Miejsce zerowe funkcji

3.75. a) tak b) tak c) tak d) nie e) nie f) tak

3.76. a) dwa miejsca zerowe: –3 oraz 1 b) brak miejsc zerowych c) dwa miejsca zerowe: 0 oraz 4 d) trzy miejsca zerowe: –5, –3 oraz 6

3.77. a) dwa miejsca zerowe: –1 oraz 8 b) brak miejsc zerowych

3.78. a) $D_f = \mathbf{R} - \{-3\}$; –1 oraz 1 b) $D_f = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$; żadna c) $D_f = \langle 2, +\infty)$; 2 d) $D_f = \mathbf{R}$; –3 oraz 4

3.79. a) jedno miejsce zerowe: –2 b) jedno miejsce zerowe: 3 c) dwa miejsca zerowe: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ d) brak miejsc zerowych e) brak miejsc zerowych f) dwa miejsca zerowe: –5, 0

3.80. a) $a = 0{,}5$ b) $a = 0{,}25$ c) $a = -1{,}5$ d) $a = -1$

3.81. a) 16 b) 0 c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ d) 8 e) 3 f) brak miejsc zerowych

3.82. a) $D_f = \left(-\infty, 4\frac{1}{2}\right\rangle$; miejsce zerowe: $4\frac{1}{2}$ b) $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$; brak miejsc zerowych
c) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$; miejsca zerowe: –5, 5 d) $D_f = \mathbf{R} - \{-3, 3\}$; miejsca zerowe: –1, 6
e) $D_f = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$; miejsca zerowe:0, 3 f) $D_f = \mathbf{R} - \{-4, 0\}$; brak miejsc zerowych

3.83. a) $D_f = \langle 2, +\infty)$; miejsce zerowe: 2 b) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$; miejsca zerowe: –5 oraz $1\frac{1}{2}$
c) $D_f = (-\infty, 4\rangle$; miejsca zerowe: 3 oraz 4 d) $D_f = \mathbf{R} - \{3\}$; brak miejsc zerowych
e) $D_f = \mathbf{R}$; miejsce zerowe: 1 f) $D_f = (-\infty, 1)$; miejsce zerowe: –2

3.84. a) $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$; miejsce zerowe: 0 b) $D_f = (-\infty, 3)$; miejsce zerowe: –3
c) $D_f = \mathbf{R}$; miejsca zerowe: –5 oraz 0 d) $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$; miejsce zerowe: 0
e) $D_f = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$; brak miejsc zerowych f) $D_f = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$; brak miejsc zerowych

3.85. a) 0 oraz 2 b) –1 c) –2 oraz $1\frac{1}{2}$ d) 9

3.86. a) $2\frac{2}{5}$ b) –5 oraz 4 c) $-\frac{1}{2}$, 0 oraz 5 d) 6

3.87. a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -3) \cup (2, +\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$
b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 2)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -7, -5) \cup (2, 3\rangle$
c) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, 5\rangle$
d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -1) \cup (4, +\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 4)$
e) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -3, 0) \cup \langle 3, 5)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 3) \cup (5, +\infty)$
f) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{-5, -4, -3\} \cup (2, 4\rangle$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$

3.88. a) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, 3\rangle$ b) $x \in \langle -4, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ c) $x \in \langle -4, -2\rangle \cup \langle 0, 3\rangle$

3.89. a) $x \in \langle -4, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ b) $x \in (-1, 3\rangle$ c) $x \in \langle -4, -3) \cup \langle 2, 4)$

3.90. a) np. $f(x) = x^2 + 7$ b) np. $f(x) = x - 2$ c) np. $f(x) = (x + 3)(x - 5)$
d) np. $f(x) = (x^2 - 16)(x - 1)(x - 8)$

3.91. a) np. $f(x) = \frac{x-5}{(x+1)(x-3)}$ b) np. $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)(x-8)}{x}$
c) np. $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)(x-7)}$ d) np. $f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{\sqrt{x-1}}$

3.92. a) np. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) np. $y=\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{\sqrt{-x}}$ c) np. $y=\sqrt{x-4}$

d) np. $y=(x+5)(x+4)\sqrt{-x-3}$

3.93. a) $D_f=\left\langle -2\frac{1}{2}, +\infty\right)$; brak miejsc zerowych b) $D_f=(5, +\infty)$; miejsce zerowe: 7

c) $D_f=\langle 1, 3)$; miejsce zerowe: 1 d) $D_f=(-1, 1)\cup(1, +\infty)$; miejsce zerowe: 2

3.94. a) $D_f=(-9, +\infty)$; miejsce zerowe: $-1\frac{1}{3}$ b) $D_f=(-\infty, 2)$; miejsce zerowe: -3

c) $D_f=(-\infty, 4)$; miejsce zerowe: 0 d) $D_f=\left(-6, 4\frac{1}{2}\right)$; miejsca zerowe: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

3.95. a) 5 oraz $-\frac{2}{3}$ b) 0 oraz 11

Funkcje równe

3.97. a) tak b) nie c) nie d) tak e) tak f) tak
3.100. a) tak b) tak c) nie d) nie

Monotoniczność funkcji

3.101. a), b), d), e)
3.102. a), b), f)
3.103. a), b), c)
3.104. a) $\langle -1, 3\rangle$ b) $(-4, -2\rangle, \langle 2, 4\rangle$ c) $\langle -4, -2\rangle, \langle 0, 5\rangle$ d) $\langle -2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle$
3.105. a) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -2\rangle, \langle 3, +\infty)$; malejąca w przedziale $\langle -2, 3\rangle$
b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-5, -3\rangle, \langle 3, +\infty)$; stała w przedziale $\langle -3, -1\rangle$; rosnąca w przedziale $\langle -1, 3\rangle$
c) funkcja jest stała w przedziale $\langle -4, -2\rangle$; malejąca w przedziale $\langle -2, 1\rangle$; rosnąca w przedziale $\langle 1, 5\rangle$
d) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 2, 5\rangle$; malejąca w przedziale $(-3, 2)$
e) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -5\rangle, \langle 3, 5\rangle$; rosnąca w przedziale $\langle -5, 3\rangle$; stała w przedziale $(5, +\infty)$
f) funkcja jest stała w przedziale $\langle -5, -3\rangle$; rosnąca w każdym z przedziałów: $(-3, 1\rangle$, $\langle 4, 6\rangle$; malejąca w przedziale $\langle 1, 4\rangle$
3.108. *wskazówka* do c): Podaj przykład dwóch argumentów x_1, x_2 takich, że $x_1 < x_2$ i $f(x_1) < f(x_2)$.
3.115. a) rosnąca b) malejąca c) malejąca d) malejąca

Funkcje różnowartościowe

3.116. a) jest różnowartościowa b) nie jest różnowartościowa
3.117. funkcje różnowartościowe są w przykładach: c), d), e)
3.118. a) $x\in\langle -3, 3\rangle$ b) $x\in\{-2, 3, 5\}$
3.119. funkcja różnowartościowa jest w przykładzie b) oraz f)
3.120. tak
3.121. tak
3.122. nie
3.127. e) Funkcja nie jest różnowartościowa, bo np.: $f(6)=f(8)$.

Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste

3.128. a) $D_f = \langle -4, 4\rangle$; funkcja parzysta; nie jest różnowartościowa
b) $D_g = (-2, 2)$; funkcja nieparzysta; jest różnowartościowa
c) $D_h = \mathbf{R}$; funkcja jest parzysta i nieparzysta jednocześnie; nie jest różnowartościowa
d) $D_r = (-4, 4)$; funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta; nie jest różnowartościowa
e) $D_p = \mathbf{R}$; funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta; nie jest różnowartościowa
f) $D_t = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$; funkcja jest nieparzysta; jest różnowartościowa
g) $D_s = \langle -5, 5\rangle$; funkcja jest nieparzysta; jest różnowartościowa
h) $D_k = \langle -4, -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, 4\rangle$; funkcja jest parzysta; nie jest różnowartościowa
i) $D_l = (-4, -1\rangle \cup \langle 1, 4)$; funkcja jest nieparzysta; nie jest różnowartościowa

3.129. a) miejsca zerowe: -4 oraz 4
b) f jest malejąca w przedziałach: $\langle -5, -2\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$; f jest rosnąca w przedziałach: $\langle -2, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 2, 5\rangle$ c) $ZW_f = \langle -5, 2\rangle$

3.130. a) funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość równą -2 dla argumentów: -4, 0 i 4
b) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -2) \cup \{0\} \cup (2, 5)$ c) 0

3.131. a) $ZW_f = (-2, 2) \cup \{-4, 4\}$ b) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x \in \langle 2, 5)$ c) $f(-\pi) = 4$

3.132. a) miejsca zerowe: $-4, -2, 2, 4$ b) $x \in \langle -4, -2\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup \langle 4, 6)$
c) $(-6, -5\rangle$, $\langle -3, -1\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 5, 6)$

3.133. a) np. $f(x) = 3$ b) np. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

3.134. a) np. $f(x) = x^3$ b) np. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

3.139. funkcje parzyste w punktach: b), d); funkcje nieparzyste w punktach: c), e); funkcje, które nie są ani parzyste ani nieparzyste w punktach: a), f)

3.140. a) $g(x) = 8$, $h(x) = 3x$ b) $g(x) = 9x^2 - 2$, $h(x) = 6x$

c) $g(x) = \dfrac{5^x + 5^{-x}}{2}$, $h(x) = \dfrac{5^x - 5^{-x}}{2}$ d) $g(x) = 6$, $h(x) = x^3 - x$

e) $g(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^4 + 2}$, $h(x) = \dfrac{-3x}{x^4 + 2}$, f) $g(x) = \dfrac{-2}{x^2 + 1}$, $h(x) = \dfrac{5x^3}{x^2 + 1}$

Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach

3.141. c) $D_f = (-4, 4\rangle$; $ZW_f = (-3, 3\rangle$; miejsca zerowe: -3 oraz 3; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 3) \cup (3, 4\rangle$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -3)$; funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-4, -2\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -2, 3\rangle$; funkcja nie jest różnowartościowa; największa wartość funkcji jest równa 3, najmniejszej wartości funkcja nie przyjmuje
e) $D_f = \langle -4, 5)$; $ZW_f = \langle -2, 5)$; miejsce zerowe: 4; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -4, 2) \cup (4, 5)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle 2, 4)$; funkcja jest rosnąca w przedziałach: $\langle -4, -2)$, $\langle 2, 5)$, funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -2, 2\rangle$; funkcja nie jest różnowartościowa; największej wartości funkcja nie przyjmuje, najmniejsza wartość funkcji jest równa (-2)

3.142. a) $D_f = \langle -4, 8)$; $ZW_f = \langle -2, 4\rangle$ b) -2 oraz 3 c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -4, 0\rangle$, $\langle 6, 8)$ d) największa wartość wynosi 4 dla argumentu 0

3.143. a) $D_f = \langle -7, -1) \cup \langle 0, 5\rangle$; $ZW_f = \langle -3, 4\rangle$ b) -16 c) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -4, -2\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$ d) $\langle -7, -3) \cup \langle 0, 5\rangle$

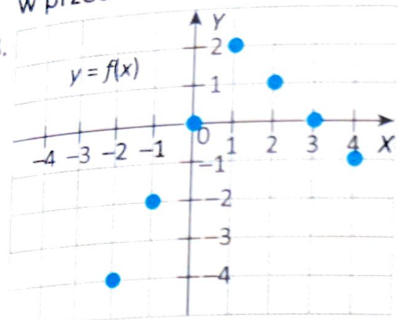
3.144. a) $ZW_f = (-\infty, -2) \cup \langle 1, 3\rangle$ b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, 2\rangle$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$
d) -5; nie istnieje

3.145. a) $D_f = \langle -5, 9)$; $ZW_f = (-3, 7\rangle$ b) $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \langle 4, 5)$ c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -5, -3\rangle$, $\langle 5, 9)$; malejąca w przedziale $\langle 2, 5)$; stała w przedziale $\langle -3, 2\rangle$ d) funkcja przyjmuje największą wartość równą 7 dla argumentów $x \in \langle -3, 2\rangle$; nie przyjmuje wartości najmniejszej

3.146. a) -2 b) $ZW_f = \langle -4, 1\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$ c) -2 oraz 5 d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, -3\rangle \cup (5, 6\rangle$

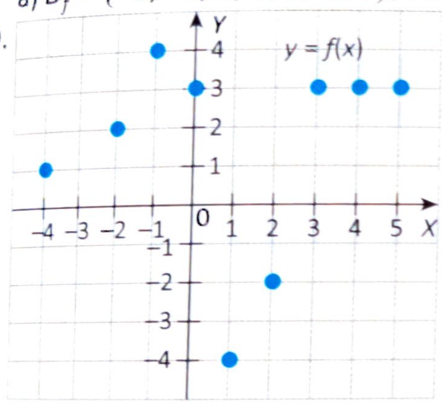
3.147. a) $D_f = \langle -5, 6\rangle$ b) $\langle -5, 0\rangle \cup \{3\}$ c) najmniejsza wartość to -4; największej wartości funkcja nie przyjmuje d) funkcja jest stała w przedziale $\langle -5, 0\rangle$; rosnąca w przedziale $\langle 0, 3)$; malejąca w przedziale $\langle 3, 6\rangle$

3.148.



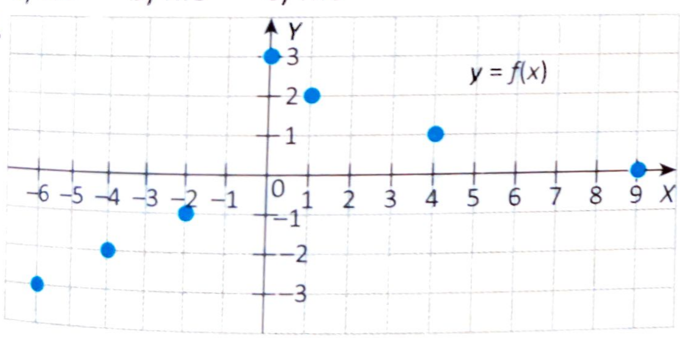
a) $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $ZW_f = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2\}$ b) $\{-2, -1, 0, 3, 4\}$ c) -2

3.149.



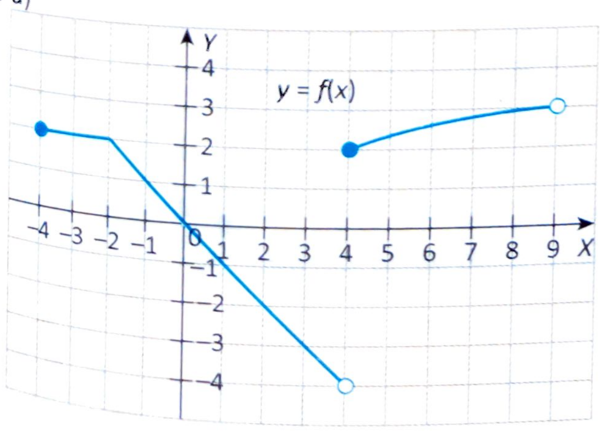
a) tak b) nie c) nie

3.150.

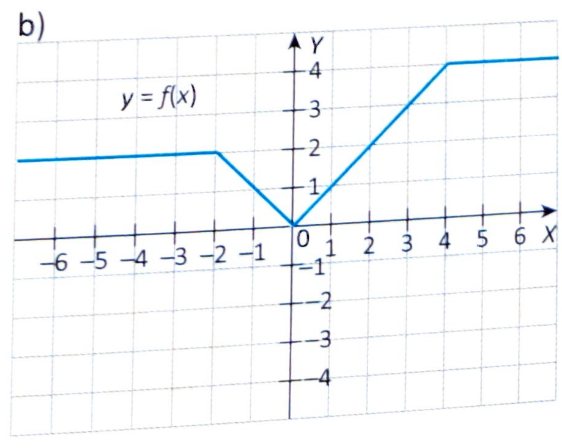


c) $7\frac{1}{2}$

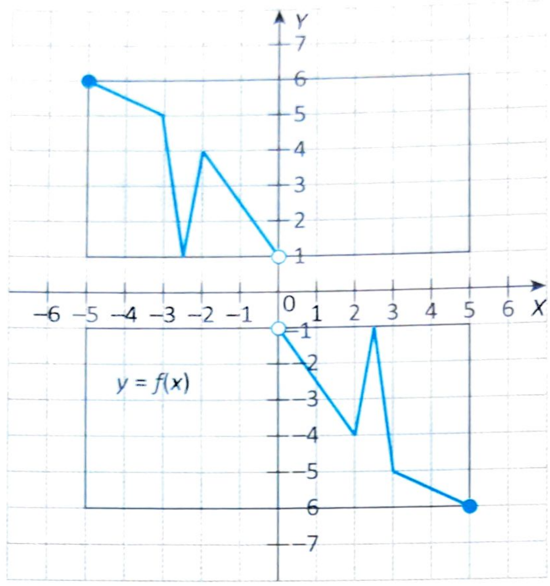
3.151. a)



b)



3.156. np.



Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

3.160. a) w temperaturze 10°C – chlorku sodu b) w temperaturze ok. 58°C c) 40°C
d) $16\frac{2}{3}\%$

3.161. a) o godz. 5^{00} temperatura była najniższa i wynosiła –3°C b) 8°C
c) 5^{00}–14^{00} d) o godz. 12^{00} oraz o godz. 19^{00}

3.162. a) 4,5 km/h b) 10 min c) 45 km d) 54 km/h

3.163. a) o godz. 9^{20} b) po 1 h

3.164. a) 4,5 m/s^2 b) 27 m/s c) 243m d) 20,25 m/s, czyli 72,9 km/h

Test sprawdzający do rozdziału 3.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**B**	**D**	**B**	**A**	**C**	**C**	**D**	**A**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**D**	**B**	**B**	**A**	**C**	**C**	**B**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 3.

16. a) 2 b) $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in \{-4, 1, 2\}$ c) 19 d) tak

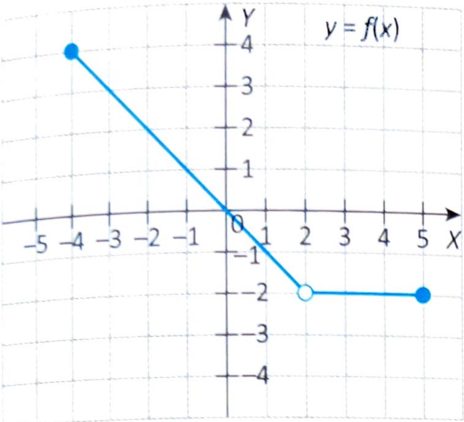
17. a) 5 b) $g(x) = \begin{cases} -2, \text{ jeśli } x \in \{-3, -2, -1\} \\ x, \text{ jeśli } x \in \{0, 1, 2, 3\} \end{cases}$ c) $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\}$ d) nie

18. a) (0, –4) b) nie c) 2 d) 1

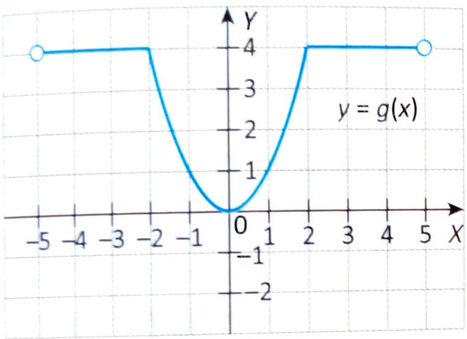
19. a) 12, 21, 30 b) 1 – najmniejsza wartość funkcji f; 18 – największa wartość funkcji f
c) nie jest monotoniczna d) nie jest różnowartościowa

20. $D = \langle -5, 6)$; $ZW = \langle -3, 3\rangle$; miejsca zerowe: -4, 1, 5; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -5, -4) \cup (1, 5)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 1) \cup (5, 6)$; f malejąca w przedziałach: $\langle -5, 0\rangle$, $\langle 4, 6)$, f rosnąca w przedziale $\langle 0, 2\rangle$, f stała w przedziale $\langle 2, 4\rangle$; f nie jest różnowartościowa; dla $x = 0$ f przyjmuje wartość najmniejszą równą -3, dla $x \in \langle 2, 4\rangle$ f przyjmuje wartość największą, równą 3

21. a) $f(-\sqrt{10}) = -6$ oraz $f(1) = -6$ b) $\left(0, -7\frac{1}{2}\right)$

22. 

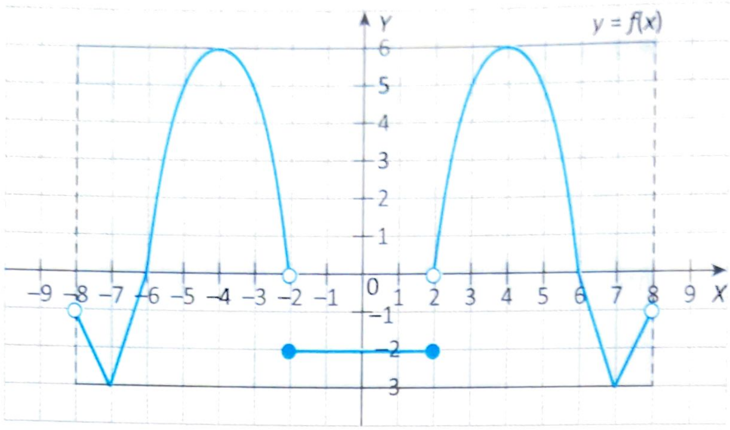
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2) \cup (2, 5\rangle$

23. 

g stała w przedziałach: $(-5, -2\rangle$, $\langle 2, 5)$
g malejąca w przedziale $\langle -2, 0\rangle$
g rosnąca w przedziale $\langle 0, 2\rangle$

24. a) $4\sqrt{2} - 3$ b) -3 c) 0 oraz -6
25. a) -2 oraz 4
26. a) $(0, -8)$ b) $-31\frac{1}{2}$ c) nie należy
27. a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ b) $D_f = \boldsymbol{R}$ c) $D_f = \langle -7, 9)$ d) $D_f = \langle -2, +\infty) - \{2\}$
28. a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-3\}$; miejsce zerowe: 4 b) $D_f = (-\infty, -2)$; miejsce zerowe: -5
c) $D_f = \boldsymbol{R} - \{0, 3\}$; miejsce zerowe: -6 d) $D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$; brak miejsc zerowych
29. a) $a = 1{,}5$ $f(x) = \dfrac{3x+3}{x+1}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-1\}$ c) $(0, 3)$ d) $ZW_f = \{3\}$
30. a) $k = 4$ b) $D_g = \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, miejsce zerowe: $-\dfrac{1}{3}$
31. a) funkcja f jest malejąca w przedziałach: $\langle -8, -4\rangle$, $\langle 3, 7)$ b) $x \in \langle -8, -5\rangle \cup \langle -2, 6\rangle$
c) $m = -1$ d) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -8, -6) \cup \langle -2, 4)$
32. a) nie b) tak
33. a) $D_f = \boldsymbol{R} - \{-4\}$
35. a) $\dfrac{1}{4}$
36. a) nie

37. np.



4. Funkcja liniowa

Proporcjonalność prosta

4.1. a) tak; $a=\frac{1}{3}$; $y=\frac{1}{3}x$ b) nie c) tak; $a=2\sqrt{3}$; $y=2\sqrt{3}x$

d) tak; $a=-\frac{2}{3}$; $y=-\frac{2}{3}x$

4.2. a) współczynnik proporcjonalności: $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) współczynnik proporcjonalności: $\frac{3}{5}$

4.3. a) $k(x)=2{,}1x$, gdzie $x \in \boldsymbol{N}$ b) 58 zł 80 gr c) 500 bochenków

4.4. $P(h)=2h$, gdzie $h>0$, h – wysokość trójkąta

4.5. a) y – liczba litrów wody wypompowanej, $y=6850x$, $x>0$ b) 85 625 litrów c) 13 godzin

4.6. a) $y=18x$, $x>0$ b) 8 godz. 40 min. c) 57 detali

4.7. a) $s(t)=64t$, $t \in \boldsymbol{R}_+$ b) $26\frac{2}{3}$ km c) 2 godz. 24 min.

4.8. a) y – zużycie paliwa w litrach, $y=0{,}08x$, $x \in \boldsymbol{R}_+$ b) 160 km c) 20,4 litra

4.9. a) y – liczba kilogramów płótna lnianego, $y=\frac{4}{45}x$, $x \in \boldsymbol{R}_+$ b) 0,72 kg c) 67,5 kg

Funkcja liniowa. Wykres i miejsce zerowe funkcji liniowej

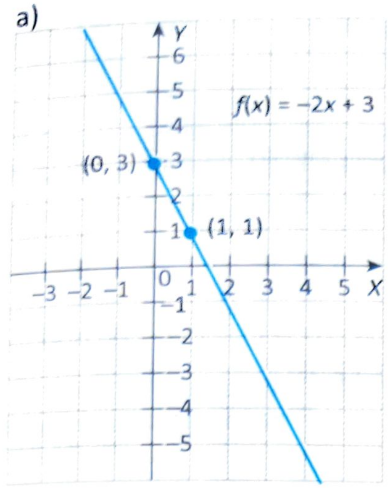
4.10. funkcje liniowe: a), b), f)

4.11. a) $a=1$; $b=7$ b) $a=-1$; $b=1$ c) $a=\sqrt{2}$; $b=0$ d) $a=0$; $b=-4$

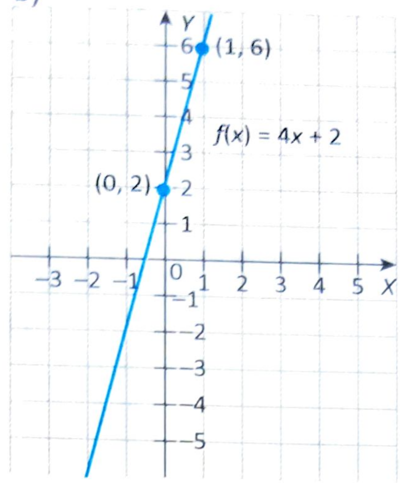
e) $a=1\frac{1}{2}$; $b=-2$ f) $a=-1\frac{1}{4}$; $b=2$

4.12. a) $y=\frac{1}{4}x$ b) $y=-2x$ c) $y=4x$

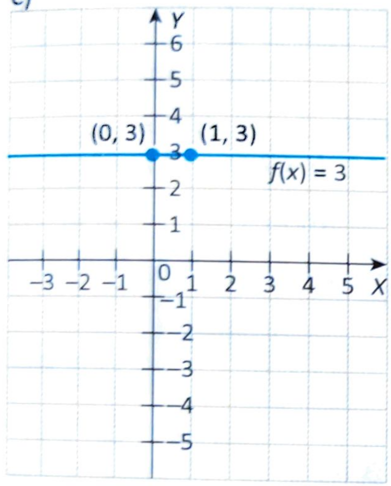
4.13. a)



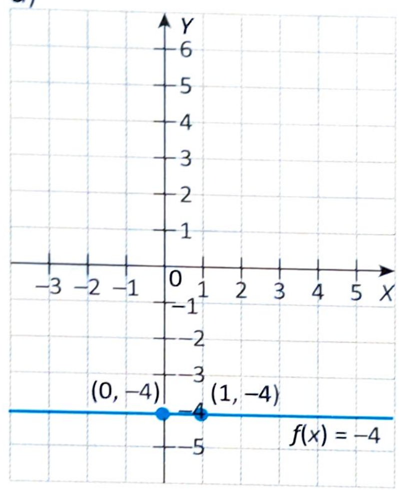
b)



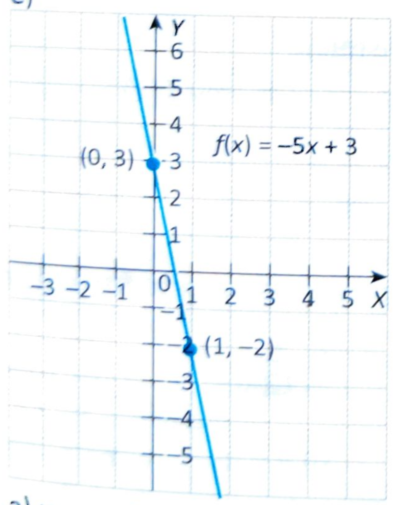
c)



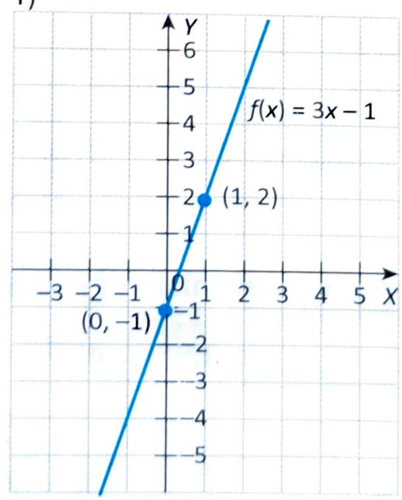
d)



e)



f)



4.14. a) $y = x + 1$ b) $y = 3x - 2$ c) $y = -2$ d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2$ f) $y = 4x - 1$

4.15. a) $y = x - 2$ b) $y = 3x + 8$ c) $y = 3x + 54$ d) $y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$

e) $y = \left(2\sqrt{3} - 2\right)x + 2\sqrt{3}$ f) $y = -\left(3 + 2\sqrt{2}\right)x + 3$

4.16. a) z osią OY: $(0, 8)$, z osią OX: $(-4, 0)$ b) z osią OY: $(0, -2)$, z osią OX: $\left(\sqrt{2}, 0\right)$
c) z osią OY: $(0, \pi + 1)$, z osią OX: $\left(\frac{\pi+1}{\pi}, 0\right)$
d) z osią OY: $\left(0, \sqrt{3}-3\right)$, z osią OX: brak e) z osią OY: $(0, 4)$, z osią OX: $(8, 0)$
f) z osią OY: $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, z osią OX: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

4.17. a) $(0, -4)$, $(8, 0)$ b) $(0, 2)$, $(6, 0)$ c) z osią OY: $(0, -1)$, z osią OX: brak
d) $(0, 3)$, $(-4, 0)$ e) $(0, -1)$, $(5, 0)$ f) $(0, 2)$, $(2, 0)$

4. 18. a) 5 b) -2 c) $\sqrt{3}$ d) 0 e) -22 f) każda liczba rzeczywista jest miejscem zerowym funkcji

4.19. a) $1\frac{1}{2}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) 1 d) $\frac{\pi}{3}$ e) brak miejsc zerowych f) $-3-2\sqrt{3}$

4.21. a) $y = 1{,}5x - 3$ b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$

4.22. a) $m = 2$; $a = -1$ b) $m = 1$; $a = -5$ c) $m = 1$; $a = 2$ d) $m = -4$; $a = 96$

4.23. a) $k = -4$; $b = 7$ b) $k = -5$; $b = -19$ c) $k = -11$; $b = 7$ d) $k = 3$; $b = -18$

4.24. a) $m = -1$ b) $m = -2$ lub $m = 2$ c) $m = 3$ d) $m = \frac{-2}{3}$ e) $m = 0$
f) $m = 2\sqrt{3}$ lub $m = -2\sqrt{3}$

4.25. a) $m = 2$ b) $f(x) = 4x + 6$; miejsce zerowe: $-1{,}5$

4.26. a) $m = 1$ b) $f(x) = -x - 2$

4.27. a) $m = \frac{1}{6}$ b) $m = 3$ c) $m = -1$ d) $m = 1\frac{1}{3}$

4.29. $y = -27x$

4.31. a) $m = 3$ b) $m = -1$ c) $m = 0{,}5$ d) nie istnieje

4.32. a) $m = 1$; $f(x) = 1$ b) nie istnieje c) dla $m = -\sqrt{3}$ mamy $f(x) = -2\sqrt{3}$; dla $m = \sqrt{3}$ mamy $f(x) = 2\sqrt{3}$ d) $m = -4$; $f(x) = -8$

4.33. a) $m = 2$ b) $m = -5$ lub $m = 5$ c) $m = 0$ d) $m = -2$

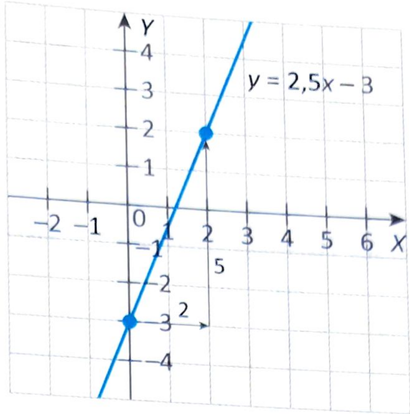
Znaczenie współczynnika kierunkowego występującego we wzorze funkcji liniowej

4.34. a) $-1\frac{1}{4}$ b) $-1\frac{1}{5}$ c) 1,9 d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $\frac{1}{12}$

4.35. a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ b) $y = -\frac{2}{7}x$ c) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - 6$ d) $y = \pi$ e) $y = -2x + \frac{1}{4}$
f) $y = \frac{1}{5}x$

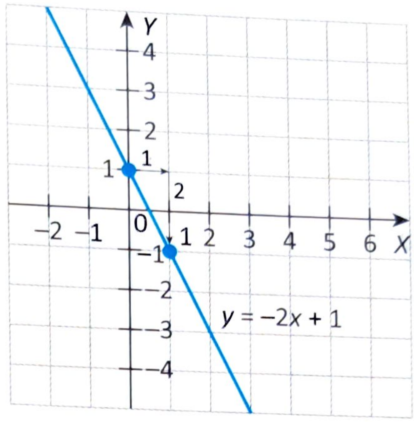
4.36. a) punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY: $(0, -3)$; $a = \frac{5}{2}$

Przyrost argumentu o 2 powoduje przyrost wartości funkcji o 5, zatem wykres funkcji przechodzi także przez punkt $(2, 2)$.



b) punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY: $(0, 1)$; $a = \frac{-2}{1}$

Przyrost argumentu o 1 powoduje spadek wartości funkcji o 2, stąd wykres przechodzi przez punkt $(1, -1)$.



4.37. a) $y = -\frac{1}{5}x + 3$ b) $y = \frac{1}{2}x - 2$ c) $y = \frac{2}{3}x - 4$ d) $y = -\frac{3}{5}x + 2$

e) $y = \frac{2}{5}x - 3$ f) $y = \frac{1}{2}x + 3$

4.38. a) $(0, -2)$ b) 8 d) $x \in (8, +\infty)$

4.39. a) z osią OY: $(0, -8)$, z osią OX: $(-4, 0)$ d) $x \in (-\infty, -5)$

4.40. b) tak c) $x \in \langle 6, +\infty)$

4.41. a) 2,5 c) $x \in (-\infty, -10\rangle$

4.42. a) rosnąca b) malejąca c) stała d) malejąca e) malejąca f) rosnąca

4.43. a) $m \in (-1, +\infty)$ b) $m \in \left(-\infty, -1\frac{1}{2}\right)$ c) $m = 2$ d) $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

e) $m \in (-\infty, -3)$ f) $m \in \boldsymbol{R}$

4.44. a) $a > 0, b > 0$ b) $a < 0, b > 0$ c) $a > 0, b < 0$ d) $a = 0, b > 0$

4.45. a) $a = -8$; $b = -9$; ćwiartki: II, III, IV b) $a = \frac{1}{2}$; $b = 28$; ćwiartki: I, II, III

c) $a = 1$; $b = 7$; ćwiartki: I, II, III d) $a = 0$; $b = -2$; ćwiartki: III, IV

4.46. $a = -3$ lub $a = 3$

4.47. $a \in (-6, 0)$

4.48. $k \in (-2, 1)$

4.49. $k = 1\frac{1}{2}$

4.50. a) nie b) nie c) tak d) tak e) nie f) tak

4.51. a) $g(x) = -8x + 96$ b) $g(x) = (\sqrt{5} + 2)x - 10$ c) $g(x) = -4x + 3$

d) $g(x) = -\frac{1}{4}x + 11$ e) $g(x) = \pi$ f) $g(x) = 3x$

4.52. a) $m = 3$ b) $m = 1$ c) $m = -1$ d) $m = -2$ lub $m = 2$

4.54. Tak, proste są wykresami funkcji liniowych, których współczynniki kierunkowe występujące we wzorach są takie same i wynoszą 2.

4.55. *wskazówka*: Wykaż, że proste AD i BC są równoległe.

Własności funkcji liniowej – zadania różne

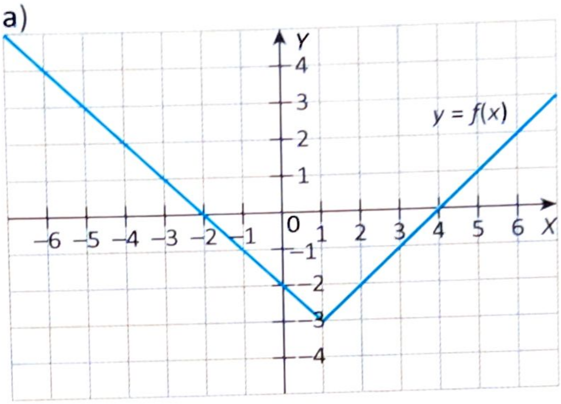
4.59. $f(x) = \frac{-3}{5}x + 9$

4.60. $g(x) = \frac{7}{8}x - 21$

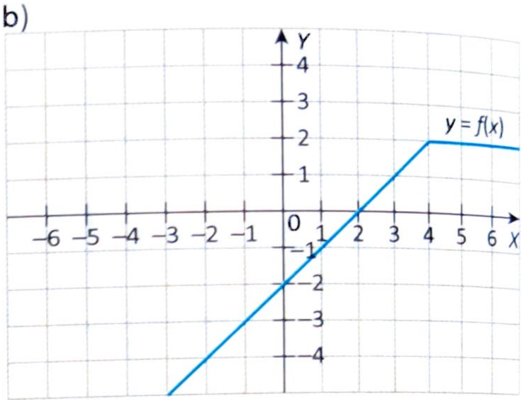
4.61. $h(x) = 71$

4.62. a) $x \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\sqrt{3} \right\rangle$ b) $f\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}\right) = 4$

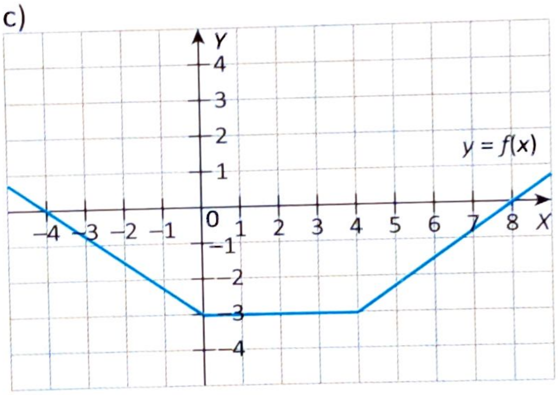
4.63. a)



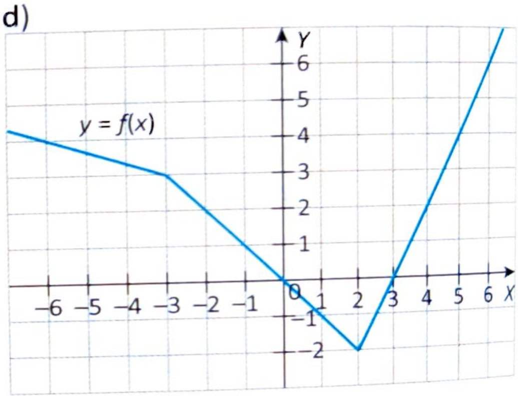
b)



c)



d)



4.64. a) $-\frac{2}{3}$ b) 0 oraz 3

4.65. a) $f(-9) = 5$ b) -6 oraz $-\frac{1}{2}$ c) $(0, 1)$

4.67. a) $a = -1$ b) $g(x) = x - 8$

4.68. a) $x = 1$; $f(1) = g(1) = 2$ b) $x \in (-\infty, 1)$ c) $x \in (-5, 9)$ d) $x \in (-\infty, 4)$

4.69. a) $x \in (-5, 2)$ b) $x \in (-\infty, -4\rangle$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $g(x) = -3x - 15$

4.70. a) $x = -2$; $f(-2) = g(-2) = 2$ b) $x \in (-3, 2)$

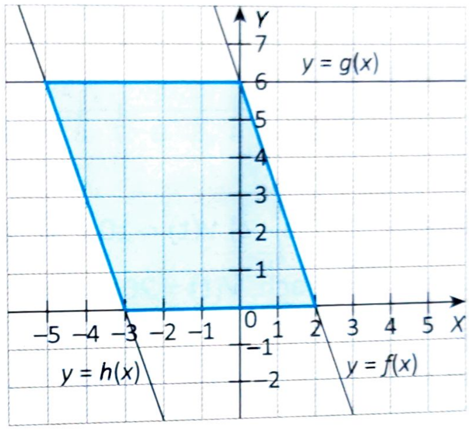
4.71. a) $(3, -1)$ b) $x \in (-\infty, 3)$ c) $x \in \left(2\frac{1}{2}, 4\right)$

4.72. a) $x \in (3, +\infty)$ b) $x \in \left(-2, 1\frac{1}{3}\right)$

4.73. a) $\left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$ b) $f(-4) < g(-4)$ c) $x \in \langle -8, 2\rangle$

4.74. a) 8 b) $\left(-3\frac{1}{5}, 2\frac{2}{5}\right)$ c) $x \in (-\infty, -3)$

4.75. a) $g(x) = 6$ b) $h(x) = -3x - 9$ c) równoległobok



4.76. a) $g(x) = \frac{x}{2} + 1\frac{1}{2}$ c) $x \in (-3, 6)$

4.77. a) $(1, 6)$ b) $m = 4$ c) $g(2) < f(2) < h(2)$

4.78. $(0,9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$

4.79. $x \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

4.80. a) $x \in \langle 1, 7\rangle$ b) $k = -3{,}5$

4.81. a) $f(-1) = 11$ b) $b \in (-\infty, 1)$

4.82. a) $x = 2$ b) $b \in (-\infty, 10)$

4.83. a) -14 b) $k \in (-\infty, -26)$

4.84. $m \in (0, 3)$

4.85. $m \in (2, 10)$

4.86. a) $x \in \left(-5, 5\frac{3}{4}\right)$ b) $a \in (-9, +\infty)$

4.87. a) $f(3) = 10$ b) $k \le 2\frac{2}{3}$ i $k \in \mathbf{N}$, więc $k \in \{0, 1, 2\}$

4.88. 3

4.89. 6

4.90. a) $k \in \mathbf{R} - \{-2, 1\}$ b) $k = -9$ c) $k = -2$

4.91. a) $m \in (6, +\infty)$ b) $m = 5$ c) $m = 5\frac{4}{5}$ d) $m = 1$

Nie istnieje taka liczba m, dla której liczba 2 jest miejscem zerowym obu funkcji.

4.92. $k = -25$

Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych

4.93. x – liczba dni; $f(x) = 14000 - 200x$, $x \in \mathbf{N}$ i $x \le 70$

4.94. a) t – czas oszczędzania (w miesiącach); $f(t) = 120 + 56t$, $t \in \mathbf{N}_+$ i $t \le 24$

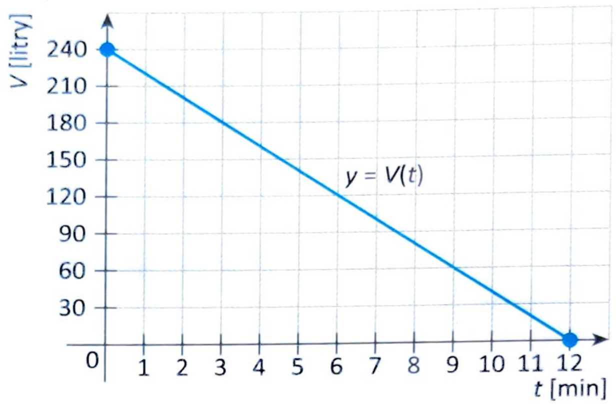
b) po 15 miesiącach

4.95. t – czas jazdy (w godzinach), $f(t) = 180 - 45t$, $t \in \langle 0, 4 \rangle$

4.96. d) t – czas (w minutach), $V(t) = 40 - 5t$, $t \in \langle 0, 8 \rangle$

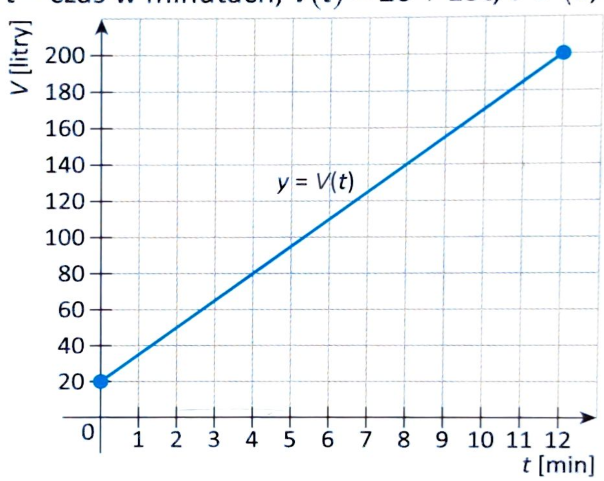
4.97. b) $V(t) = 240 - 20t$, t – czas (w minutach), $t \in \langle 0,12 \rangle$

c)

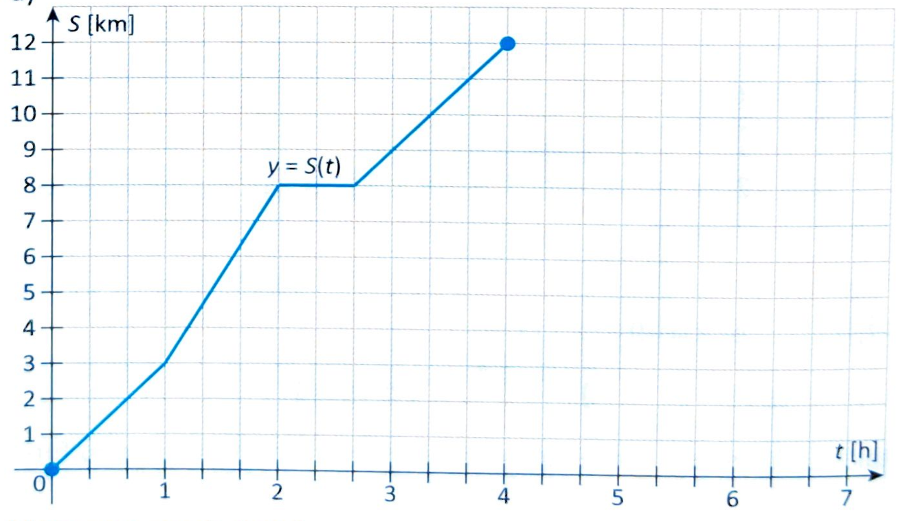


4.98. a) 50 l b) 15 min c) $V(t) = 10 + 4t$, t – czas (w minutach), $t \in \left\langle 0, 62\frac{1}{2} \right\rangle$

4.99. t – czas w minutach, $V(t) = 20 + 15t$, $t \in \langle 0; 12 \rangle$



4.100. a)



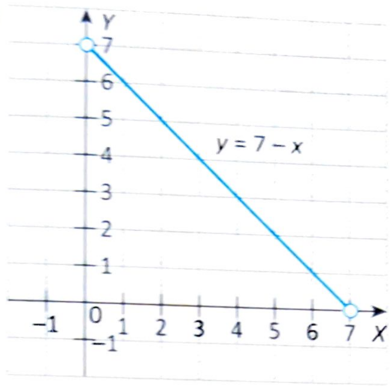
b) Turysta przebył 12 km.

4.101. a) $y = 7 - x$

b) $D = (0, 7)$

c) $x = 3$

d)

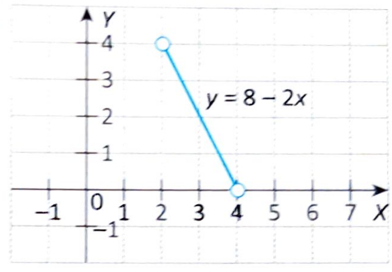


4.102. a) $y = 8 - 2x$

b) $D = (2, 4)$; *wskazówka*: $x > 0$, $y > 0$, $y < 2x$

c) $x = 3{,}5$

d)



4.103. a) korzystniejsze warunki pracy wybrała Magda b) 20

4.104. a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40, & \text{jeśli } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340, & \text{jeśli } x > 2000 \end{cases}$ c) $f(1800) = 50$; $f(5800) = 820$

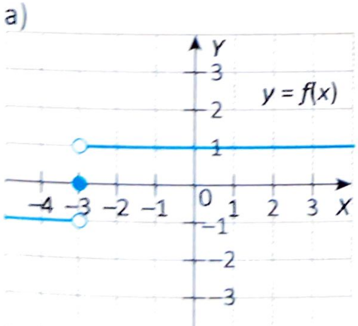
4.105. a) MULTI – TAXI: $k(n) = 3{,}6 + 1{,}6(n - 1)$; TRANS – TAXI: $k(n) = 4 + 1{,}4(n - 1)$; gdzie $n \in \boldsymbol{N}_+$ i $n \le 40$ b) 3 km c) TRANS – TAXI

4.106. a) k – opłata miesięczna (w zł), x – liczba impulsów, $x \in \boldsymbol{N}$ i $x \le 1000$

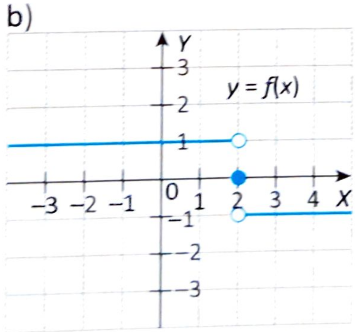
I. $k(x) = 28 + 0{,}12x$ II. $k(x) = 0{,}47x$ b) należy wybrać I wariant c) 80

Wykresy wybranych funkcji

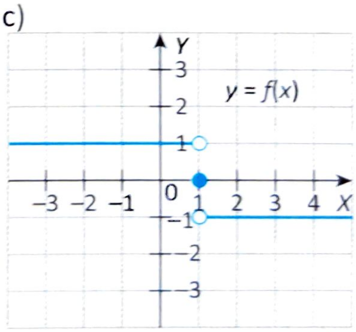
4.107. a)



b)



c)



4.108. a) $f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \\ -x - 2, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{jeśli } x \in \langle 0, +\infty) \\ 3x, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

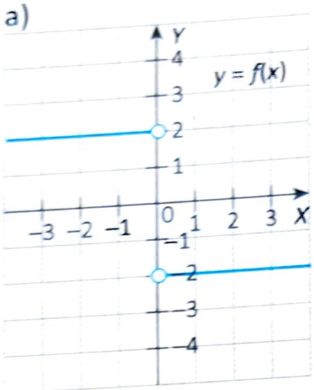
c) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{jeśli } x \in \langle -3, +\infty) \\ -x - 3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -3) \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{jeśli } x \in \langle -1, +\infty) \\ x + 6, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{jeśli } x \in (-\infty, 3\rangle \\ 2x - 3, & \text{jeśli } x \in (3, +\infty) \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{jeśli } x \in \langle -4, +\infty) \\ -2x - 4, & \text{jeśli } x \in (-\infty, -4) \end{cases}$

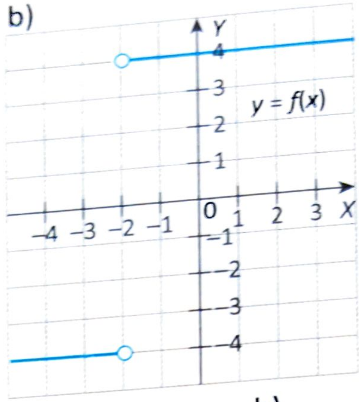
4.109. a) $f(x)=\begin{cases}-2, \text{ jeśli } x\in(0,+\infty)\\ 2, \text{ jeśli } x\in(-\infty,0)\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}4, \text{ jeśli } x\in(-2,+\infty)\\ -4, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-2)\end{cases}$

c) $f(x)=x$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$

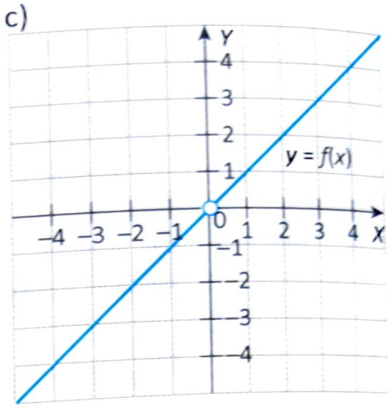
a)



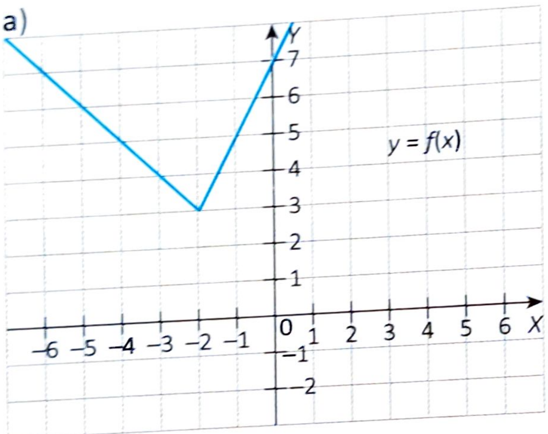
b)



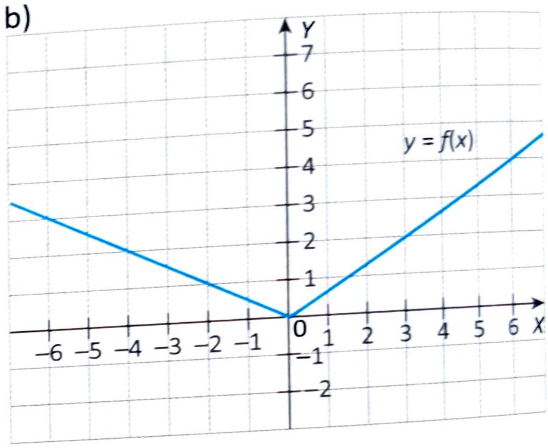
c)



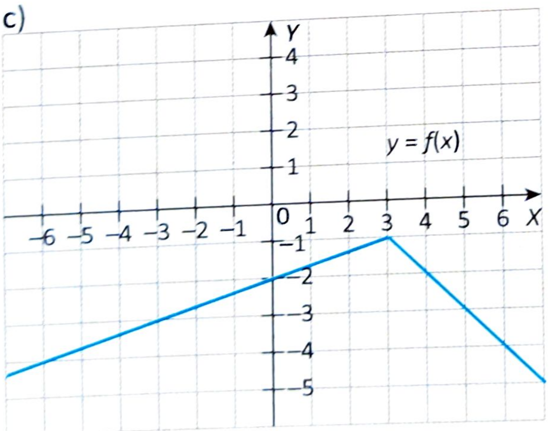
4.110. a)



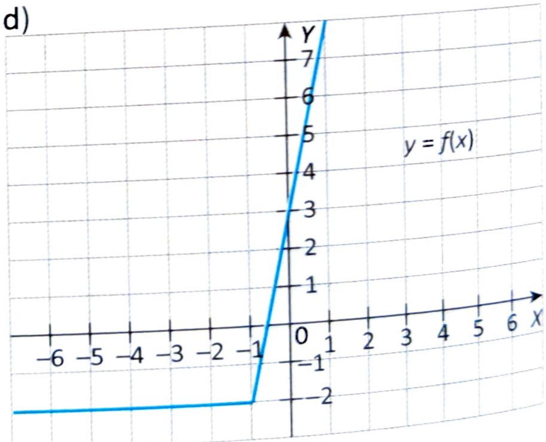
b)



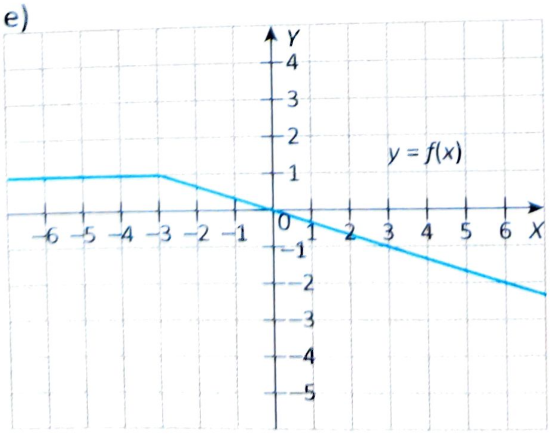
c)



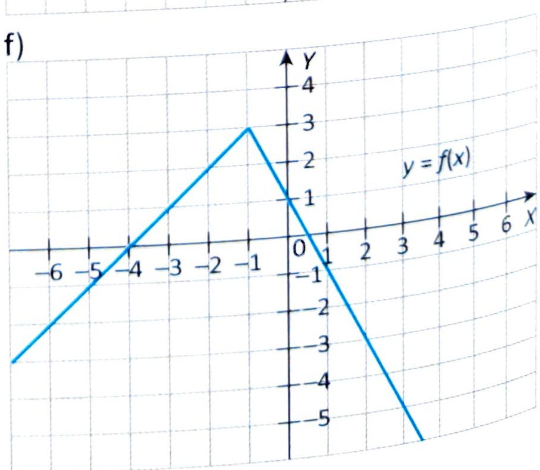
d)



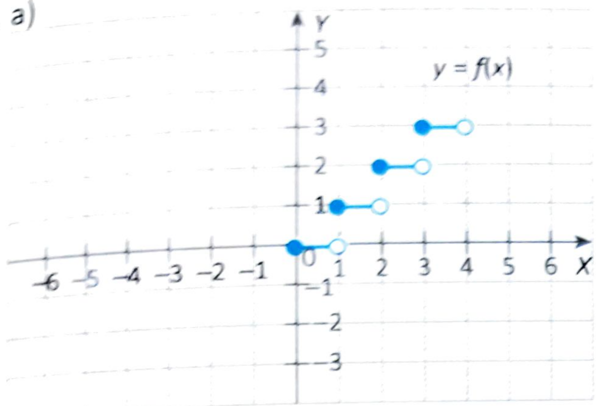
e)



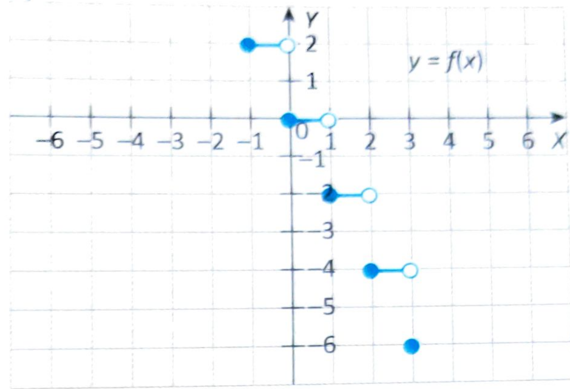
f)



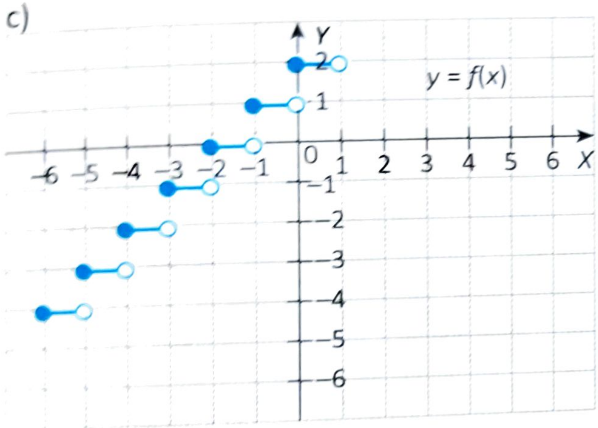
4.111. a)



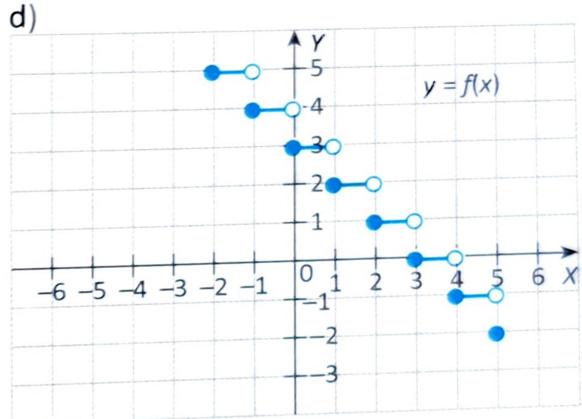
b)



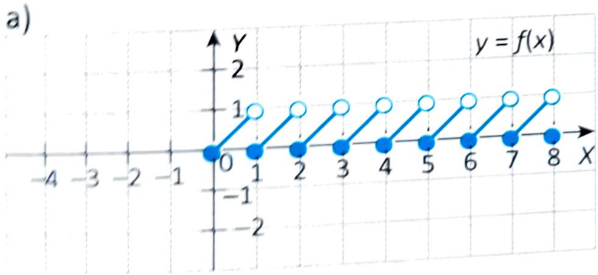
c)



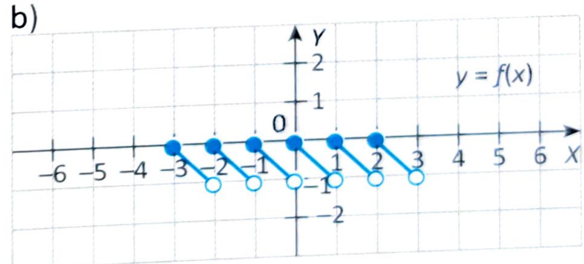
d)



4.112. a)

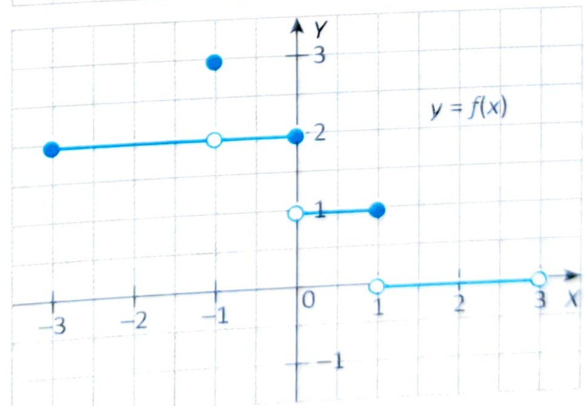


b)



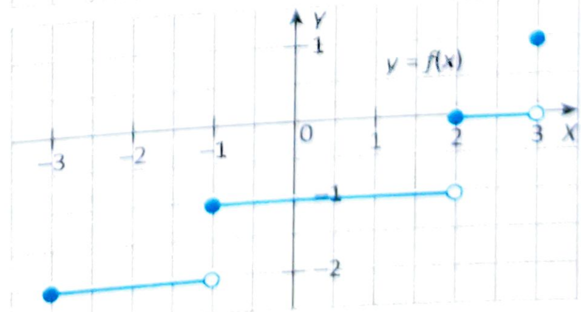
4.113. a)

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{ jeśli } x\in\langle -3,-1)\cup(-1,0\rangle\\ 3, \text{ jeśli } x=-1\\ 1, \text{ jeśli } x\in(0,1\rangle\\ 0, \text{ jeśli } x\in(1,3)\end{cases}$$



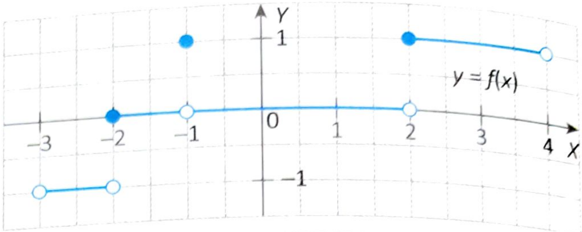
b)

$$f(x)=\begin{cases}-2, \text{ jeśli } x\in\langle -3,-1)\\ -1, \text{ jeśli } x\in\langle -1,2)\\ 0, \text{ jeśli } x\in\langle 2,3)\\ 1, \text{ jeśli } x=3\end{cases}$$



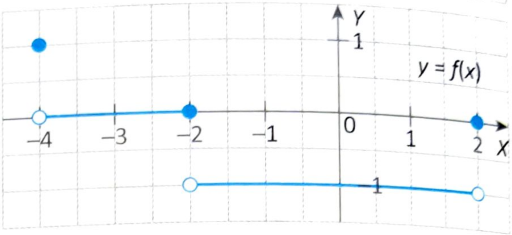
c)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ jeśli } x\in(-3,-2)\\ 0, \text{ jeśli } x\in\langle -2,-1)\cup(-1,2)\\ 1, \text{ jeśli } x\in\{-1\}\cup\langle 2,4)\end{cases}$$



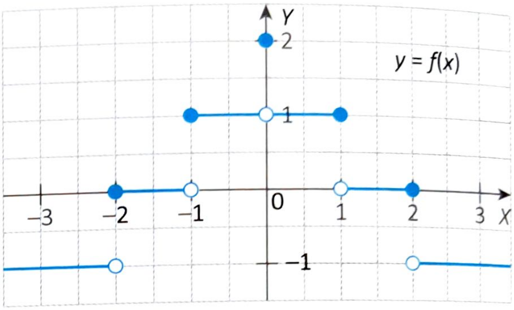
d)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ jeśli } x\in(-2,2)\\ 0, \text{ jeśli } x\in(-4,-2\rangle\cup\{2\}\\ 1, \text{ jeśli } x=-4\end{cases}$$



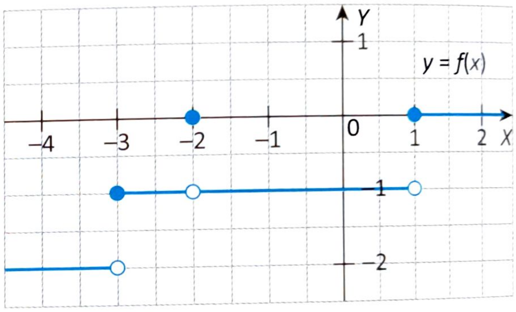
e)

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)\\ 0, \text{ jeśli } x\in\langle -2,-1)\cup(1,2\rangle\\ 1, \text{ jeśli } x\in\langle -1, 0)\cup(0,1\rangle\\ 2, \text{ jeśli } x=0\end{cases}$$



f)

$$f(x)=\begin{cases}-2, \text{ jeśli } x\in(-\infty,-3)\\ -1, \text{ jeśli } x\in\langle -3,-2)\cup(-2,1)\\ 0, \text{ jeśli } x\in\{-2\}\cup\langle 1,+\infty)\end{cases}$$



Test sprawdzający do rozdziału 4.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**A**	**C**	**C**	**D**	**A**	**C**	**B**	**D**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**C**	**D**	**A**	**D**	**A**	**D**	**B**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 4.

16. a) $(0, 5-\pi)$ b) 2
17. a) $f(x)=12x-60$ b) 5
18. $D=\boldsymbol{R}$; $ZW=\boldsymbol{R}$; punkt przecięcia z osią OY: $(0,-2)$; miejsce zerowe 6; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x\in(6,+\infty)$, a ujemne dla $x\in(-\infty,6)$; funkcja rosnąca i różnowartościowa; nie przyjmuje ani wartości największej, ani wartości najmniejszej.
19. a) nie b) tak
20. a) $f(2-\sqrt{3})>f(2+\sqrt{3})$ b) $x\in(3,+\infty)$

21. a) $x \in \langle 7, +\infty)$ b) $a = \frac{3}{8}$

22. $y = \frac{-1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

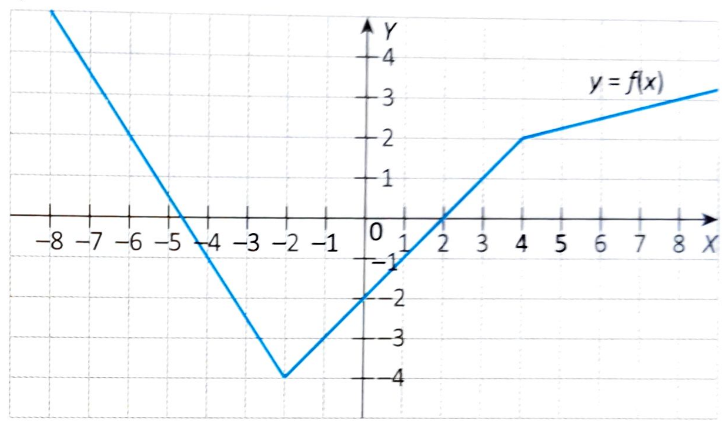
23. a) $f(x) = 2x + 5$ b) $y = 2x - 2018$

25. a) 8 litrów b) x – liczba przejechanych kilometrów; $V(x) = 40 - 0{,}08x$; $x \in \langle 0, 500 \rangle$
c) $k(v) = 12{,}5v$; $v \in \langle 0, 50 \rangle$

26. a) miejsce zerowe funkcji f: 6; miejsce zerowe funkcji g: 2 b) $x \in (2, 6)$
c) $(3, -2)$ d) $x \in (3, +\infty)$

27. a) $x = 105$; $f(105) = -30$ b) $x \in (-\infty, 15)$

28. a) $-4\frac{2}{3}$ oraz 2 b) $(0, -2)$ c)



29. a) $m = 1\frac{1}{4}$ b) $f(x) = -\frac{17}{4}x$ c) nie

30. a) $(0, -3)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ b) $b \in (12, +\infty)$

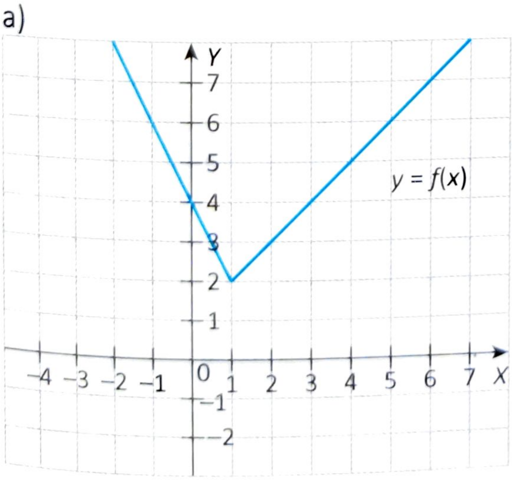
31. a) $m \in (-\infty, 7)$ b) $m \in (7, +\infty)$ c) $m = 7$

34. 16

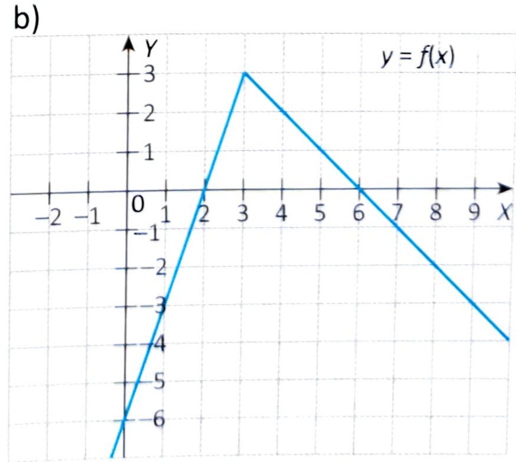
35. a) $a \in \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right\rangle$ b) $a \in \boldsymbol{R}$

36. a) $m = 1$, $k = -5$

42. a)



b)



5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

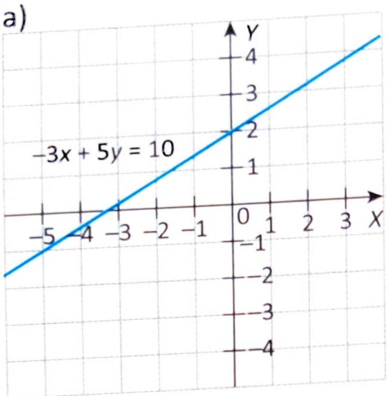
Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

5.1. w przykładach b), d), f)

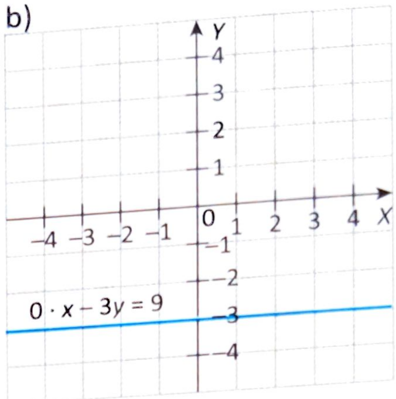
5.2. a) $\left(20, -\frac{5}{3}\right), \left(-57, -1\frac{2}{3}\right)$ b) $(5, -12)$ c) wszystkie d) $\left(0, -1\frac{1}{4}\right), (-6, -2)$

5.3. a) $a = 5, b = -84$ b) $a = \frac{3}{8}, b = -9$ c) $a = -6, b = 19$ d) $a = 8\sqrt{2}, b = -\frac{7\sqrt{2}}{5}$

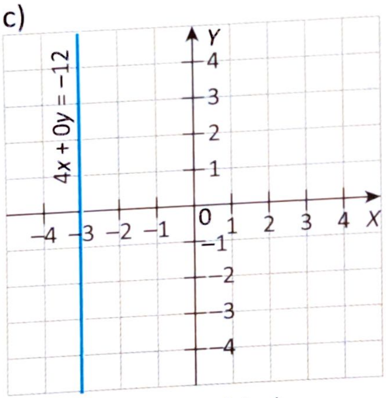
5.4. a)



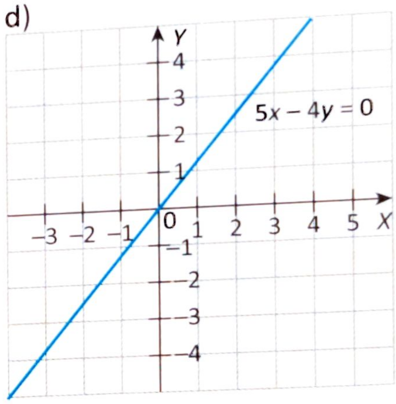
b)



c)



d)



5.5. b), d) i f) oraz a) i e)

5.6. a) $x - y = -3$ b) $2x - 4y = 0$ c) $0 \cdot x + 2y = 3$ d) $2x - y = 0$

5.7. a) np. $5x - y = 7$; b) np. $x + 0y = 9$; c) np. $0x - y = 2$; d) np. $6x - y = 0$
e) np. $x - 4y = -1$ f) np. $2x + 3y = 7$

5.8. a) $\left(x, \frac{-2}{3}x + 1\frac{2}{3}\right), x \in \boldsymbol{R}$ lub $\left(-\frac{3}{2}y + 2\frac{1}{2}, y\right), y \in \boldsymbol{R}$ b) $\left(x, \frac{-1}{5}\right), x \in \boldsymbol{R}$

c) $\left(x, \frac{5}{6}x\right), x \in \boldsymbol{R}$ lub $\left(\frac{6}{5}y, y\right), y \in \boldsymbol{R}$ d) $\left(1\frac{3}{4}, y\right), y \in \boldsymbol{R}$ e) $(x, x - 3), x \in \boldsymbol{R}$

lub $(3 + y, y), y \in \boldsymbol{R}$ f) $\left(x, \frac{1}{2}x + 2\right), x \in \boldsymbol{R}$ lub $(2y - 4, y), y \in \boldsymbol{R}$

5.9. a) $0x + y = 2$ b) $x + 0y = -4$ c) $x - 2y = -2$ d) $3x + 4y = 12$

5.10. a) m: $y - 2 = 0$, l: $x - 5 = 0$, k: $7x + 11y = -20$
b) m: $2x + 15y = 48$, l: $2x - 3y = 12$, k: $2x + 3y = 0$

5.11. a) $(3, 5), (6, 4), (9, 3), (12, 2), (15, 1)$ b) $(5, 6), (10, 5), (15, 4), (20, 3), (25, 2), (30, 1)$
c) takie pary nie istnieją d) $(5, 1)$

5.12. a) $(-2, 2), (-4, 1)$ b) $(3, -3), (6, -2), (9, -1), (12, 0)$ c) $(0, -6), (-3, -2)$

5.13. a) (1, 2); długości boków: 5, 6, 7 b) (0, 4), długości boków: 7, 11, 12 lub (2, 3), długości boków: 6, 12, 12 lub (4, 2), długości boków: 5, 12, 13 lub (6, 1), długości boków: 4, 12, 14

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań

5.14. a) (2, 1) b) żadna c) (5, 3), (−10, −7) d) (4, 10)

5.15. a) układ $\begin{cases} x-2y=-4 \\ x-2y=0 \end{cases}$ jest sprzeczny; brak rozwiązań b) układ $\begin{cases} y-3=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ jest oznaczony; (4, 3) c) układ $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ jest nieoznaczony; nieskończenie wiele rozwiązań mających postać $(x, 2-x)$, $x \in \boldsymbol{R}$

5.16. a) (1, −3) b) (4, −2) c) (−2, −2) d) (1, −1) e) (4, −2) f) (−5, 6)

5.17. a) $(x, x-4)$, $x \in \boldsymbol{R}$ b) (4, −3) c) układ sprzeczny d) $\left(x, \frac{1}{4}x-2\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$ e) układ sprzeczny f) $(x, 5)$, $x \in \boldsymbol{R}$

5.18. a) $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ y=3 \end{cases}$ (6, 3) b) $\begin{cases} x=-3 \\ y=\frac{1}{3}x-2 \end{cases}$ (−3, −3) c) $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=\frac{1}{5}x-4 \end{cases}$ (5, −3)

d) $\begin{cases} y=-5x+20 \\ y=1\frac{2}{3}x-13\frac{1}{3} \end{cases}$ (5, −5) e) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x+1 \\ y=\frac{1}{4}x+1 \end{cases}$ $\left(x, \frac{1}{4}x+1\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$

f) $\begin{cases} y=-2{,}5x+3 \\ y=-2{,}5x-5 \end{cases}$ układ sprzeczny

5.19. a) nieoznaczony b) sprzeczny c) oznaczony d) nieoznaczony e) oznaczony f) sprzeczny

5.21. a) (6, 2) b) (4, 3) c) (−4, −2) d) $\left(x, \frac{2}{3}x+2\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$ e) (6, −1) f) układ sprzeczny

5.22. a) (2, −4) b) (1, 3) c) układ sprzeczny d) $\left(x, \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$ e) układ sprzeczny f) (4, 9)

5.23. a) $n=0$, $m=-1$ b) $n=3$, $m=6$ c) $n=3$, $m=1$ d) $n=2$, $m=3$

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

5.24. a) (5, 3) b) (2, 1) c) (1, −1) d) $(x, x-4)$, $x \in \boldsymbol{R}$ e) układ sprzeczny f) $(x, -x+4)$, $x \in \boldsymbol{R}$

5.25. a) (1, −3) b) $\left(x, -\frac{3}{2}x+2\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$ c) (5, −3) d) układ sprzeczny e) (−2, 3) f) (7, 1)

5.26. a) $(-19, -3)$ b) $(-6, 12)$ c) $(2, 2)$ d) $(-2, -1)$ e) $(5, 4)$
f) układ sprzeczny

5.27. a) $\left(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $(3, 1)$ c) $(x, 2x - 4), x \in \boldsymbol{R}$ d) $(4, 16)$

5.28. a) $(x, -x - 12), x \in \boldsymbol{R}$ b) $(-14, -10)$ c) $(12, 6)$ d) $(5, 1)$
e) układ sprzeczny f) $(-5, 3)$

5.29. a) $A(3, 5)$ b) $A(-4, -3)$ c) $A(1, 5)$ d) $A(2, 4)$

5.30. a) $a = 1, b = 5$ b) $a = 2, b = 4$ c) $a = -3, b = 5$ d) $a = 2, b = 3$

5.31. a) $50°, 50°, 80°$ b) $40°, 40°, 140°, 140°$

5.32. $|AB| = |DC| = 8$, $|BC| = |AD| = 5$

5.33. 26

5.34. a) $(4, 2)$ b) $(0, 0)$ c) $(4, 2)$ d) układ sprzeczny

5.35. a) $(1, 4)$ b) $(2, 10)$ c) $(-2, -1)$ d) $(x, x + 2), x \in \boldsymbol{R}$ e) układ sprzeczny
f) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

5.36. a) $(3, 2, 1)$ b) $(5, -3, 7)$ c) $(1, 5, 7)$

Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników

5.37. a) $(1, -2)$ b) układ sprzeczny c) $(3, 2)$ d) $(5, -5)$ e) $(8, 1)$
f) $\left(x, \frac{1}{6}x - 1\frac{1}{2}\right), x \in \boldsymbol{R}$

5.38. a) $(6, 15)$ b) $(5, 3)$ c) $(-5, 9)$ d) $(15, 3)$ e) $(16, 12)$
f) układ sprzeczny

5.39. a) $(1, -1)$ b) $(1, 2)$ c) $(4, 2)$ d) $(3, 2)$

5.40. a) $f(x) = -32x + 45$ b) $f(x) = 0{,}4x - 9$ c) $f(x) = -\frac{1}{8}x + 12$
d) $f(x) = -\frac{1}{4}x + 13\frac{1}{2}$

5.41. a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 6$ b) $C(6, -2)$

5.42. a) $(-8, -31)$ b) $a = 9$

5.43. $m = 4$, $n = 2$

5.44. a) układ sprzeczny b) $(2, 0)$ c) $(5, 2)$ d) $(x, x + 7), x \in \boldsymbol{R}$

5.45. a) $(6, 9)$ b) $(2, -1)$ c) $(-1, -9)$ d) $(2, -3)$

5.46. a) $x = 3, y = 2$; *wskazówka:* Jeśli $x, y \in \boldsymbol{N}$, to $x + y \in \boldsymbol{N}$ oraz $x - y < x + y$.
Iloczyn $(x - y) \cdot (x + y)$ jest równy 5 tylko wtedy, gdy $x + y = 5$ i $x - y = 1$.
b) $x = 2, y = 3$ c) $x = 7, y = 2$

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań

5.47. $a = 15, b = 6$

5.48. $x = 144, y = 24$

5.49. $\frac{17}{39}$

5.50. 15 i 20

5.51. 240, 560
5.52. 57
5.53. 29
5.54. 84
5.55. 24, 56
5.56. 75, 60
5.57. pyły: 0,69 mln ton; gazy: 3,15 mln ton
5.58. I – 176 000 zł II – 126 720 zł
5.59. Pan Kwiatkowski ulokował w banku 800 zł, a pan Kowalski 9200 zł.
5.60. kupiono 9 biletów dla dzieci i 7 biletów dla dorosłych
5.61. 6000 kurtek damskich, 1000 kurtek męskich
5.62. ojciec ma 32 lata, syn ma 5 lat
5.63. matka ma 58 lat, córka ma 30 lat
5.64. 58, 22
5.65. 5 cm, 4 cm
5.66. na 32 pytania
5.67. dobrze 12, źle 8
5.68. 14 i 4
5.69. 273 i 35
5.70. 594 wierzby, 1666 m
5.71. 120 uczniów, 18 ławek
5.72. 800 zł, po 10 miesiącach
5.73. 15 kg wafli czekoladowych oraz 5 kg wafli waniliowych
5.74. 2 kg roztworu o stężeniu 25% oraz 6 kg roztworu o stężeniu 45%
5.75. 1,8 g stopu 40% oraz 7,8 g stopu 80%
5.76. 18 g srebra próby 750 i 32 g srebra próby 375
5.77. 128,2 g złota próby 960 i 71,8 g złota próby 375
5.78. 3 : 1
5.79. $v_B = 6$ km/h, $v_K = 4$ km/h
5.80. Wojtek idzie z prędkością 3,5 km/h, a Jacek z prędkością 2,5 km/h.
5.81. $v_A = 60$ km/h, $v_B = 80$ km/h
5.82. $v_1 = 22$ km/h, $v_2 = 10$ km/h lub $v_1 = 17{,}2$ km/h, $v_2 = 14{,}8$ km/h
5.83. prędkość własna statku: 10,5 km/h, prędkość prądu rzeki: 2,5 km/h
5.84. 9 km/h oraz 5,4 km/h
5.85. 794
5.86. 275
5.87. wiek syna 15 lat, wiek ojca 40 lat, wiek dziadka 65 lat

Test sprawdzający do rozdziału 5.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**C**	**C**	**A**	**D**	**D**	**B**	**B**	**C**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**D**	**D**	**B**	**A**	**B**	**C**	**A**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 5.

17. $a = -\sqrt{2}$

18. a) nie b) tak
19. a) układ sprzeczny, brak rozwiązań b) $(1, -3)$
c) $\left(x, \frac{-x-3}{2}\right), x \in \boldsymbol{R}$ lub $(-3-2y, y), y \in \boldsymbol{R}$
20. a) $(4, 19)$ b) $(x, 4x-2), x \in \boldsymbol{R}$ c) układ sprzeczny, brak rozwiązań
21. a) $(3, -5)$ b) układ sprzeczny, brak rozwiązań c) $(-4, 3)$
22. a) $(3, 0)$ b) $(x, x+1), x \in \boldsymbol{R}$ c) $(-2, 5)$ d) układ sprzeczny
23. a) $a=1, b=3$ b) $a=4, b=3$
24. $a=-\frac{1}{2},\ b=4$
25. $m=13\frac{1}{2}$; rzędna jest równa $10\frac{1}{2}$
26. a) $\left(\frac{-1}{4}, -2\right)$ b) $a=-20$
27. 47
28. wiek ojca 41 lat, wiek córki 11 lat
29. w pierwszym koszu: 16 gruszek, w drugim koszu: 20 gruszek
30. 40 km/h; 44 km
31. w hurcie: papryka 4,40 zł, jabłka 3 zł; w detalu: papryka 5,50 zł, jabłka 3,60 zł
32. a) 27 zł b) 18 zł c) 3060 zł
33. 4, 8, 8
34. 30%, 60%
36. a) $(2, 7, 11)$ b) $(-3, -4, 5)$
37. 576
38. babcia 58 lat, dziadek 64 lata, wnuk 4 lata
39. $(9, 0), (7, 1), (5, 2), (3, 3), (1, 4)$
40. a) $(1, -1)$ b) $a=-\frac{3}{4}, b=11$

6. Podstawowe własności wybranych funkcji

Funkcja kwadratowa

6.1. a) $a=-4, b=0, c=0$ b) $a=\left(1-2\sqrt{2}\right), b=0, c=-8$ c) $a=1, b=5\pi, c=0$
d) $a=-1, b=3, c=13$ e) $a=9, b=-42, c=49$ f) $a=-1, b=2\sqrt{3}, c=-1$
6.3. punkty B i C
6.4. a) $y=3x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=\frac{1}{2}x^2$
6.5. $f_1(x)=-2x^2$ $f_2(x)=-\frac{2}{3}x^2$ $f_3(x)=\sqrt{2}x^2$ $f_4(x)=\frac{1}{5}x^2$
6.6. a) $W(2, 0)$; $x=2$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, 2\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 2, +\infty)$; $ZW=\langle 0, +\infty)$ b) $W(0, 5)$; $x=0$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$; $ZW=(-\infty, 5\rangle$ c) $W(-2, -3)$; $x=-2$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -2, +\infty)$; $ZW=\langle -3, +\infty)$

6.7. a) $x = 0$; $C\left(-1, 2\frac{1}{2}\right)$, $D\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ b) $x = 1$; $C(3, 4)$, $D\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$

c) $x = -4$; $C\left(-5, -1\frac{1}{2}\right)$, $D\left(-1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{8}\right)$

6.8. a) $x = 7$ b) $x = 3$ c) $x = -1$

6.9. a) $B(7, -36)$ b) $B(0, 19)$ c) $B\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

6.10. a) $W(2, 0)$

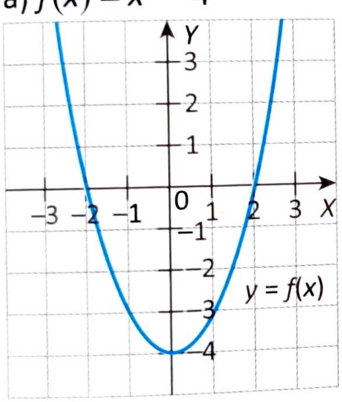
x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

b) $W(-1, 7)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-11	-1	5	7	5	-1	-11

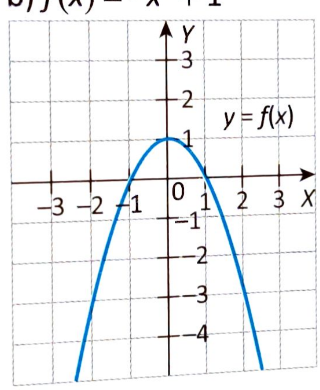
6.11. a) $W(3, 1)$; $x = 3$ b) $W(-5, -2)$; $x = -5$ c) $W(-1, 0)$; $x = -1$
d) $W(0, -3)$; $x = 0$ e) $W(7, 0)$; $x = 7$ f) $W(-4, 6)$; $x = -4$

6.12. a) $f(x) = x^2 - 4$



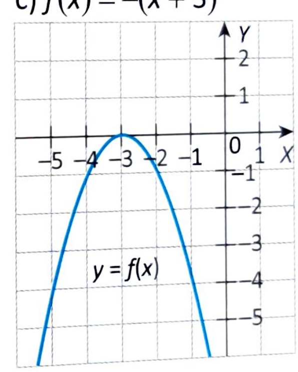
$ZW = \langle -4, +\infty)$
f rosnąca w $\langle 0, +\infty)$
f malejąca w $(-\infty, 0\rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 1$



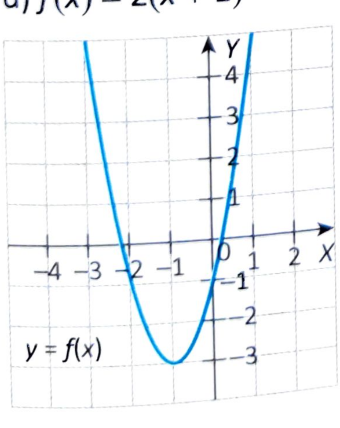
$ZW = (-\infty, 1\rangle$
f rosnąca w $(-\infty, 0\rangle$
f malejąca w $\langle 0, +\infty)$

c) $f(x) = -(x + 3)^2$



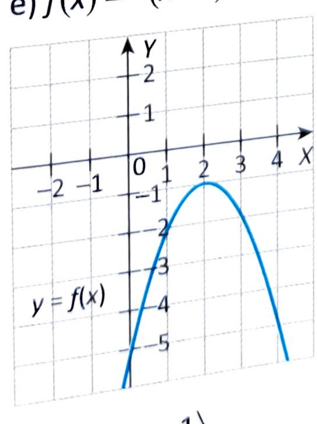
$ZW = (-\infty, 0\rangle$
f rosnąca w $(-\infty, -3\rangle$
f malejąca w $\langle -3, +\infty)$

d) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$



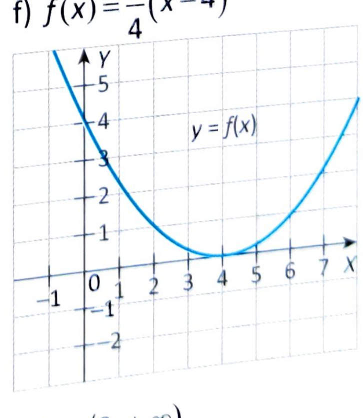
$ZW = \langle -3, +\infty)$
f rosnąca w $\langle -1, +\infty)$
f malejąca w $(-\infty, -1\rangle$

e) $f(x) = -(x - 2)^2 - 1$



$ZW = (-\infty, -1\rangle$
f rosnąca w $(-\infty, 2\rangle$
f malejąca w $\langle 2, +\infty)$

f) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 4)^2$



$ZW = \langle 0, +\infty)$
f rosnąca w $\langle 4, +\infty)$
f malejąca w $(-\infty, 4\rangle$

6.13. a) $ZW = \langle -7; +\infty)$; $W(0, -7)$; $x = 0$; funkcja rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0\rangle$
b) $ZW = (-\infty; 0\rangle$; $W(8, 0)$, $x = 8$, funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 8\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 8; +\infty)$
c) $ZW = \langle -1; +\infty)$, $W\left(-\sqrt{2}, -1\right)$, $x = -\sqrt{2}$, funkcja rosnąca w przedziale $\left\langle -\sqrt{2}; +\infty\right)$, malejąca w przedziale $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right\rangle$

6.14. a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 6$ b) $f(x) = -2x^2 + 12x$ c) $f(x) = x^2 + 10x + 1$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 8$

6.15. a) $y = (x + 1)^2$ b) $y = (x - 1)^2 + 2$ c) $y = -1(x + 1)^2 + 5$ d) $y = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
e) $y = 2(x + 2)^2 - 3$ f) $y = -3(x + 3)^2 + 7$

6.16. a) $W(1, 0)$ b) $W(6, 0)$ c) $W(-4, -16)$ d) $W(-3, 9)$ e) $W(2, -75)$
f) $W(5, -10)$

6.17. a) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$; $ZW = (-\infty, 2\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$
b) $f(x) = 2(x + 7)^2 - 98$; $ZW = \langle -98, +\infty)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -7, +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty, -7\rangle$
c) $f(x) = (x + 5)^2 - 8$; $ZW = \langle -8, +\infty)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -5, +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty, -5\rangle$
d) $f(x) = -1(x - 6)^2$; $ZW = (-\infty, 0\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 6\rangle$, malejąca w przedziale $\langle 6, +\infty)$
e) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 6$; $ZW = \langle -6, +\infty)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 3, +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty, 3\rangle$
f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 + 20$; $ZW = (-\infty, 20\rangle$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -4\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -4, +\infty)$

6.18. a) 2, 3 b) -2, 5 c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{5}$, 1

6.19. a) 0; 2 b) -24; 0 c) 0; $\frac{1}{2}$ d) 0; 4

6.20. a) -3; 3 b) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$ c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) funkcja nie ma miejsc zerowych

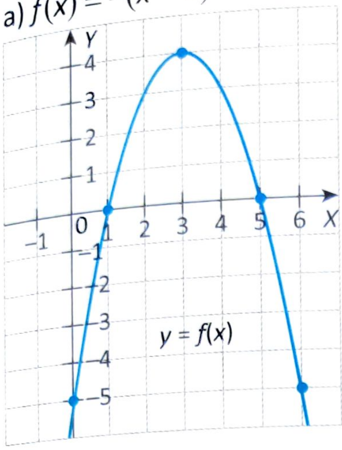
6.21 a) -5 b) 1 c) -8 d) -3

6.22. a) -1; 3 b) 0; -6 c) 7; 3 d) -4; 0 e) nie istnieją f) nie istnieją

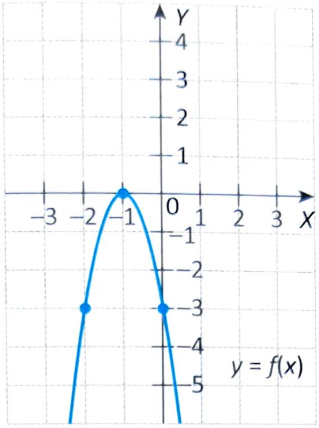
6.23. a) -1; 3 b) -3; -5 c) nie istnieją d) -8 e) 2 f) -1; 7

6.24. a) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $W(1, -16)$ b) $x_1 = 0$, $x_2 = 14$, $W(7, -147)$ c) $x = 3$, $W(3, 0)$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $W\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $x = -2$, $W(-2, 0)$ f) $x_1 = 1$, $x_2 = -9$, $W(-4, -50)$

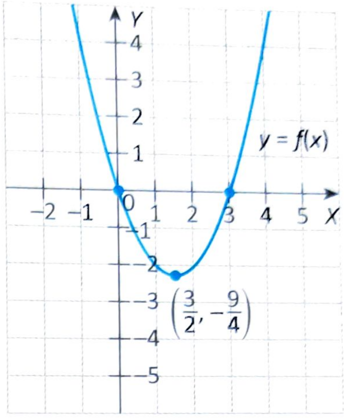
6.25. a) $f(x) = -(x-3)^2 + 4$



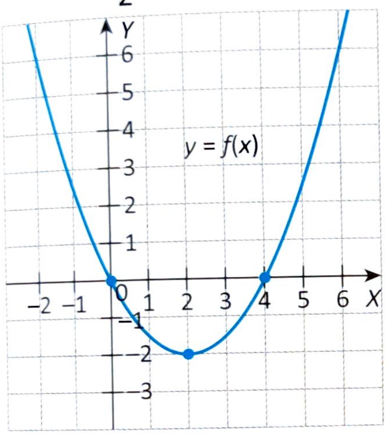
b) $f(x) = -3(x+1)^2$



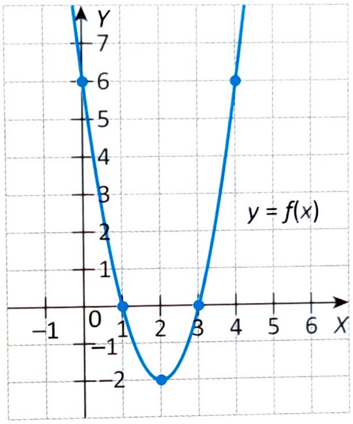
c) $f(x) = x^2 - 3x$



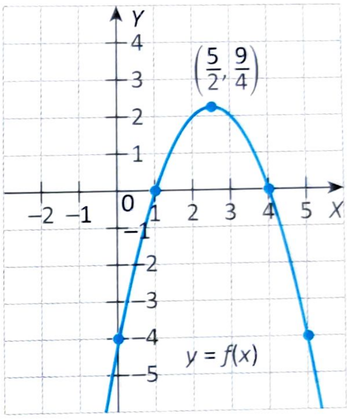
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$



e) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$



f) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$



6.26. a) $y = \frac{8}{9}(x+1)^2 - 8$ b) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$ c) $y = -(x-5)^2 + 4$

d) $y = \frac{3}{4}\left(x + 2\frac{1}{2}\right)^2 - 12$

6.27. a) $f(x) = -2x^2 + 16x - 30$ b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x$ c) $f(x) = -x^2 - 10x - 16$

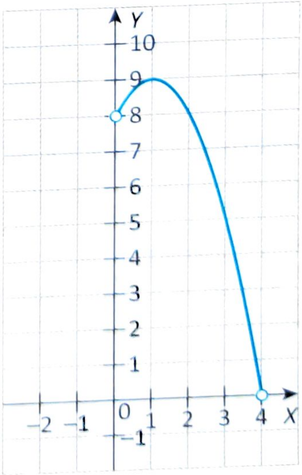
Funkcja kwadratowa – zastosowania

6.28. a) $P(x) = (2+x)(4-x)$; $D = (0, 4)$

b) $P(1) = 9$; $P(2) = 8$; $P(3) = 5$; $P\left(3\frac{1}{2}\right) = 2\frac{3}{4}$

c) $P(x) = -(x-1)^2 + 9$; $D = (0, 4)$

d)

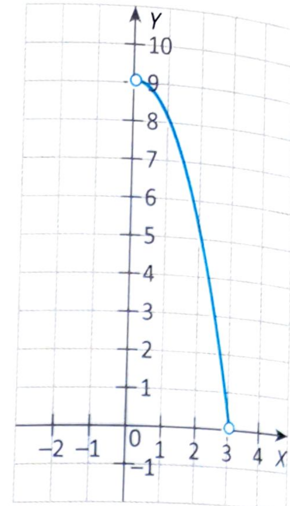


6.29. a) $P(x) = -x^2 + 9$, $D = (0, 3)$

b) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 8\frac{3}{4}$; $P(1) = 8$; $P\left(2\frac{3}{4}\right) = 1\frac{7}{16}$

c) 1 i 5

d) funkcja P nie przyjmuje ani wartości najmniejszej, ani wartości największej



6.30. a) $P(x) = \frac{1}{2}x(10 - x)$, $D = (0, 10)$ b) $P(2) = 8$, $P(4) = 12$, $P(6) = 12$, $P(8) = 8$

d) dla $x = 5$ funkcja P przyjmuje wartość największą, równą 12,5

6.31. a) $P(x) = \frac{1}{2}x(16 - x)$, $D = (0, 16)$ b) $P(10) = 30$ c) $x = 2$ lub $x = 14$

d) $P(x) = 32 - \frac{1}{2}(x - 8)^2$, $D = (0, 16)$. Wyrażenie $\frac{1}{2}(x - 8)^2$ ma najmniejszą wartość równą 0 dla argumentu 8. Wówczas pole P przyjmuje wartość największą, równą 32.

6.32. a) $f(x) = 2x^2 - 40x + 400$, $D = \mathbf{R}$ b) $f(2) = 328$, $f(4) = 272$

c) $f(x) = 2(x - 10)^2 + 200$ d) dla $x = 10$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą, równą 200

6.33. 4 m

6.34. o 10^{00}

6.35. 5 m

6.36. a) 44 m b) 11 m/s

6.37. a) 8 b) 40

6.38. $l = \frac{V}{2r}$

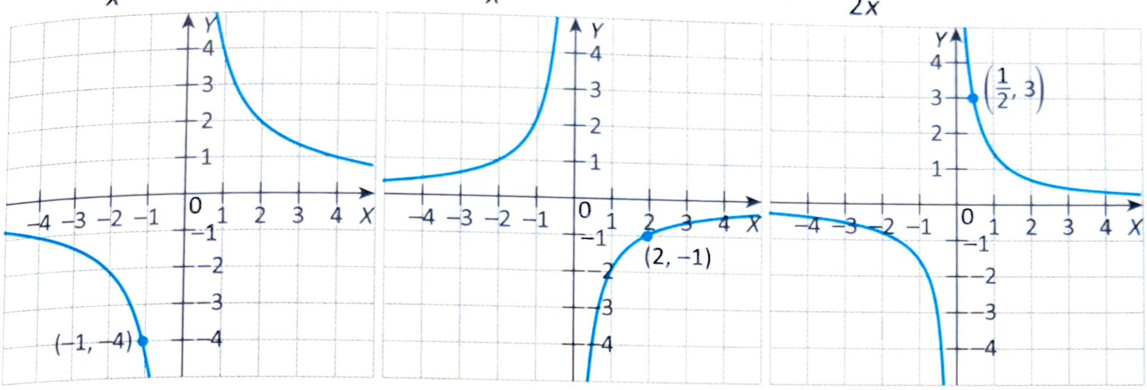
6.39. a) $f_{10}(x) = 0{,}05x^2 + 1{,}9$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$ b) $n = 30$ obr/min; wskazówka: Rozwiąż równanie $f_n(0) = 1\frac{1}{10}$. c) $n = 40$ obr/min; wskazówka: Rozwiąż równanie $f_n(2) = 3{,}6$.

Proporcjonalność odwrotna

6.40. a) nie b) tak

6.41. a) -1, -150, 125, $2{,}5\sqrt{2}$, $10 + 5\sqrt{2}$ b) 2^{10}, $4\sqrt{2}$, $0{,}5$, $16\sqrt[3]{4}$, $\frac{1}{256}$, $0{,}125$

6.42. a) $y=\dfrac{4}{x}$ b) $y=\dfrac{-2}{x}$ c) $y=\dfrac{3}{2x}$



6.43. a) $y=\dfrac{10}{x}$, gdzie $x>0$

6.44. a) $y=\dfrac{14}{x}$, gdzie $x>0$

6.45. a) $t=\dfrac{6}{v}$, gdzie $v>0$ b) 72 minuty c) 3,6 km/h

6.46. 7h; 44 km/h
6.47. na 3 dni
6.48. 11 godzin
6.49. $v=50$ km/h
6.50. $t=48$ min
6.51. 180 stron
6.52. (−8, 1), (−4, 2), (−2, 4), (−1, 8), (1, −8), (2, −4), (4, −2), (8, −1)
6.53. a) 2 b) 4 c) 5
6.54. a) 4 b) 16 c) 14
6.55. a) (1, 2), (7, 1) b) (1, 12), (2, 7), (5, 4), (10, 3) c) (8, 16), (9, 6), (11, 1), (12, 0)
6.56. 30 km/h; 6 godzin; 180 km
6.57. $x=40$, $y=30$; Ania sprzedawała tulipany po 1,50 zł za sztukę, a Jola po 2 zł za sztukę.

Funkcja wykładnicza

6.58. a) $f(x)=2^x$ c) $x\in(-\infty, 1)$

6.59. a) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ c) $x\in\langle 0, +\infty)$

6.60. a) $ZW=\left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$ b) $ZW=\left(\dfrac{1}{4}, 2\right\rangle$ c) $ZW=\left\langle\dfrac{1}{8}, 4\right\rangle$ d) $ZW=(1, 8)$

6.61. a) 10^{-1}, $10^{-0,5}$, $10^{\sqrt{3}}$, 10^2 b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1,5}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

c) 0,5; $\sqrt[3]{0,5\sqrt{0,5}}$; $\sqrt[3]{0,5}$, $\sqrt[4]{0,5}$ d) $\sqrt[4]{3}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{2-\sqrt{2}}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{1,4}$, $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$

6.62. a) $(0,5)^{-2\sqrt{2}}$, $4^{1,5}$, 2^{π}, $\left(\sqrt{2}\right)^7$ b) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$, $\left(\sqrt{3}-1\right)^{1,8}$, $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

6.63. a) 90°C b) po 5 minutach: 60°C; po 10 minutach: 40°C
6.64. a) $c=5000$, $a=3$ b) 5000 c) 10 935 000

Funkcja logarytmiczna

6.65. a) $a = 3$ c) $x \in (0, 1)$

6.66. a) $a = \frac{1}{2}$ c) $x \in (0, 2)$ d) -3

6.67. a) $ZW = (-\infty, 3\rangle$ b) $ZW = (-2, 0\rangle$ c) $ZW = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ d) $ZW = \langle -2, 4\rangle$

6.68. a) $\log 2,\ \log 3,\ \log 5,\ 1$ b) $-1,\ \log_{\frac{1}{4}}\pi,\ \log_{\frac{1}{4}}3,\ 0$

c) $\log_{\frac{1}{2}}5,\ \log_{\frac{1}{2}}3,\ 1,\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)$ d) $1+\log_3\frac{1}{10},\ \log_3\frac{1}{2},\ 0,\ 0{,}5\log_3 2$

6.69. a) *wskazówka*: $\frac{1}{2} = \log\sqrt{10}$, $1 = \log 10$; z monotoniczności funkcji $y = \log x$ wynika, że $\log\sqrt{10} < \log 5 < \log 10$ b) *wskazówka*: $1\frac{1}{2} = \log_2\sqrt{8}$, $2 = \log_2 4$

Test sprawdzający do rozdziału 6.

Nr zadania	1	2	3	4	5
Odpowiedź	**B**	**D**	**C**	**A**	**D**
Nr zadania	6	7	8	9	10
Odpowiedź	**D**	**B**	**D**	**B**	**A**

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 6.

11. a) $W\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ b) $(0, 7)$ c) $f(x) = -4x^2 + 4x + 7$

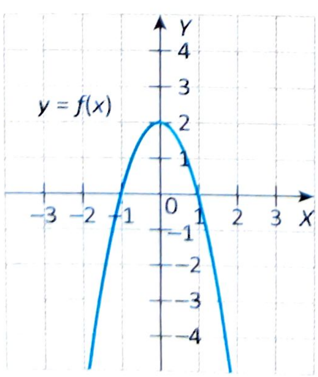
12. a) $y = 2(x-7)^2$; miejsce zerowe: 7 b) $y = -1(x-5)^2 + 25$; miejsca zerowe: 0, 10

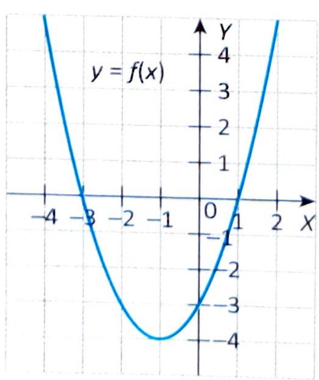
c) $y = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - 4$; miejsca zerowe: $\frac{1}{3}$, -1

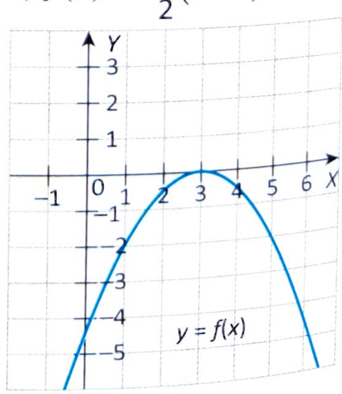
13. np. $f(x) = (x-1)^2 + 1$, $g(x) = -2x^2 - 3$

14. a) $ZW = (-\infty, 8\rangle$; $x = 0$; f rosnąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$, f malejąca w przedziale $\langle 0, +\infty)$
b) $ZW = \langle -4, +\infty)$; $x = 1$; f malejąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$, f rosnąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$
c) $ZW = \langle -2, +\infty)$; $x = -3$; f malejąca w przedziale $(-\infty, -3\rangle$, f rosnąca w przedziale $\langle -3, +\infty)$

15. a) $f(x) = -2x^2 + 2$ b) $f(x) = (x+1)^2 - 4$ c) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2$

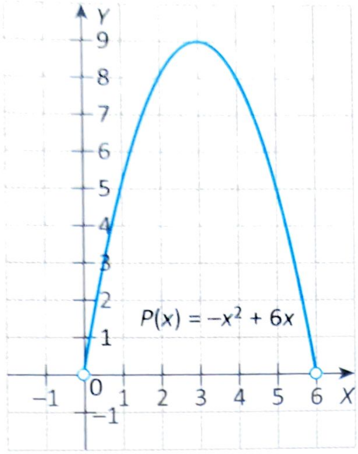






16. a) $P(x) = -x^2 + 6x$, gdzie $x \in (0, 6)$
c) 9 d) $x = 1$ lub $x = 5$

b)



17. a) $(-5, -1)$, $(-1, -5)$, $(1, 5)$, $(5, 1)$ b) $x \in (0, 5)$

18. 12 kawałków; 300 cm

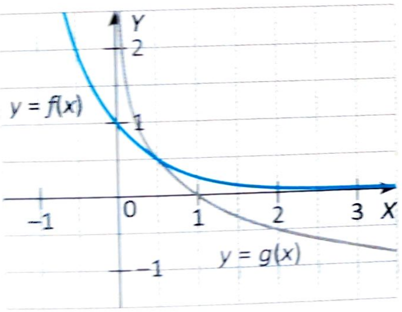
19. *wskazówka*: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ a) $f(\pi) < f(3)$ b) $x \in (-\infty, -1\rangle$

20. a) $a = 2$ b) 3 d) $x \in (0, 4\rangle$

21. *wskazówka*: Niech $y = 7 - x$, wówczas $x^2 + y^2 = 2x^2 - 14x + 49$. Pokazujemy, że funkcja $f(x) = 2x^2 - 14x + 49$ przyjmuje wartość najmniejszą, równą $24\frac{1}{2}$.

22. $b = -2$, $c = -3$; *wskazówka*: Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f, następnie zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

24. b)



c) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona

7.1. $|AB| = 64$ cm, $|DB| = 12$ cm

7.2. 22 cm

7.3. $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|CD| = 6$ cm

7.4. b), c), d), f), g) – figury wypukłe a), e), h), i) – figury wklęsłe

7.5. figury ograniczone: b), c), e) figury nieograniczone: a), d), f)

7.6. kąt wklęsły: 230°; kąt wypukły: 130°

7.7. 24°, 48°, 96°, 192°

7.8 1) 45°, 180° 2) 165°, 60°

7.9. a) 155° b) 25°
7.10. $\alpha = 48^\circ$
7.11. $|\sphericalangle AOB| = 40^\circ$, $|\sphericalangle BOC| = 75^\circ$, $|\sphericalangle COD| = 65^\circ$
7.12. a) $\alpha = 22^\circ$, $\beta = 130^\circ$ b) $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 144^\circ$ c) $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 85^\circ$
7.13. 20°, 160°
7.14. 68°, 112°
7.15. a) $0{,}155^\circ$ b) $0{,}91^\circ$ c) $0{,}8125^\circ$ d) $0{,}535^\circ$
7.16. a) $24'36''$ b) $14'24''$ c) $40'48''$ d) $44'24''$
wskazówka do a): $0{,}41 = \frac{41}{100} = \frac{(40+1)\cdot 6}{100 \cdot 6} = \frac{24}{60} + \frac{6 \cdot 6}{600 \cdot 6} = \frac{24}{60} + \frac{36}{60^2}$
7.17. b) punkt C leży między punktami A i B albo punkt B leży między punktami A i C, bliżej punktu C
7.19. 12
7.20. 20 półprostych

Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta

7.22. 3 cm lub 11 cm
7.23. b) 5 cm
7.24. *wskazówka*: Wykonaj najpierw konstrukcję symetralnej odcinka.
7.25. punkty C_1, C_4, C_5
7.26. b) 2
7.27. *wskazówka*: Wykonaj najpierw konstrukcję dwusiecznej kąta.
7.28. punkty P, S
7.29. nie
7.30. tak
7.31. a) 180° b) 360° c) 0°
7.32. na cztery lub na sześć, lub na siedem części

Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie

7.33. a) $|\sphericalangle A| = 50^\circ$, $|\sphericalangle B| = 40^\circ$, $|\sphericalangle C| = 90^\circ$ b) $|\sphericalangle A| = 55^\circ$, $|\sphericalangle B| = 70^\circ$, $|\sphericalangle C| = 55^\circ$
c) $|\sphericalangle A| = 40^\circ$, $|\sphericalangle B| = 110^\circ$, $|\sphericalangle C| = 30^\circ$ d) $|\sphericalangle A| = 20^\circ$, $|\sphericalangle B| = 40^\circ$, $|\sphericalangle C| = 120^\circ$
7.34. 49°, 131°
7.35. a) 31°, 31°, 118° b) 90°, 30°, 60° c) 35°, 40°, 105°
7.37. *wskazówka* do a): Wykaż, że $\alpha = 30^\circ$ i zastosuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.
7.39. *wskazówka*: Zastosuj twierdzenie o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą do kątów: BCA i DAC.
7.41. *wskazówka*: Wykaż, że trójkąty EBK i BFK są równoramienne.

Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie

7.42. łamanymi są figury: a), b), e), f); łamane zwyczajne to a), f); łamana zwyczajna zamknięta: f)
7.43. a) 9 b) 20 c) 90
7.44. a) w dziewięciokącie b) w czternastokącie c) w dziewiętnastokącie
7.45. 120 ścieżek

7.46. 190 powitań
7.47. a) 720° b) 900° c) 1800°
7.48. a) 135° b) 160°
7.49. dwunastokąt
7.50. 36°, 108°, 108°, 144°, 144°; tak
7.51. 170 przekątnych
7.52. a) w osiemnastokącie b) w dwudziestokącie c) w siedemnastokącie
7.53. a) $n = 7$ b) $n = 10$ c) $n = 11$ d) $n = 13$
7.54. osiemnastokąt i siedemnastokąt
7.55. nie
7.56. 3 kąty ostre

Twierdzenie Talesa

7.57. a) $x = 2{,}4$ b) $x = 9$ c) $x = 4{,}5$ d) $x = 4{,}5$ e) $x = 12$ f) $x = 10\frac{5}{7}$

7.58. a) 24,65 cm b) 3 cm c) $53\frac{1}{3}$ cm d) 13,05 cm

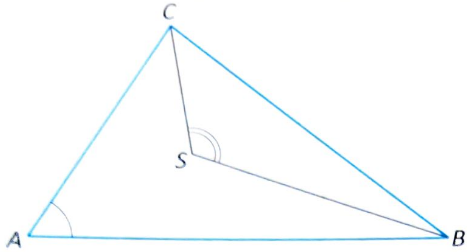
7.59. a) $2\frac{2}{3}$ cm b) 8,4 dm c) 70 cm d) 9 cm

7.61. a) tak b) nie
7.62. a) tak b) tak
7.64. o 11,2 cm
7.65. 3 dm
7.66. $|BL| = 28$ cm, $|LC| = 21$ cm
7.67. $|MN| = 11\frac{2}{3}$ cm; $\frac{|CN|}{|CB|} = \frac{7}{12}$

Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie

7.68. 32°, 58°
7.70. 30°, 30°, 120°
7.71. 36°, 36°, 144°, 144°
7.72. 22 cm
7.73. 15 cm
7.74. a) nie b) nie c) tak
7.75. a) $a \in (0, 3)$ b) $a \in (2, 6)$ c) $a \in \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$
7.76. 9 cm
7.77. 3 lub 4
7.78. 8 lub 9
7.79. 16,5 cm
7.80. 13,5 cm
7.81. 40 cm
7.83. twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe

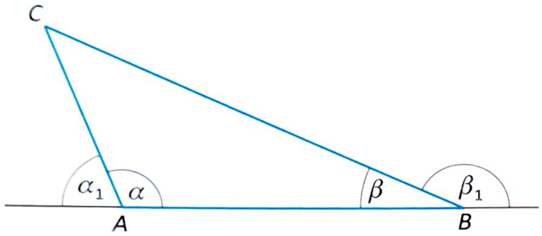
7.89. Niech dany będzie trójkąt ABC i punkt S leżący w jego wnętrzu. Wówczas:



$$|\sphericalangle CSB| = 180^\circ - (|\sphericalangle SCB| + |\sphericalangle SBC|) =$$
$$= 180^\circ - (|\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABS|) =$$
$$= 180^\circ - (|\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ABC|) + |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle ABS| =$$
$$= |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle ACS| + |\sphericalangle ABS| > |\sphericalangle CAB|, \text{ czyli}$$
$$|\sphericalangle CSB| > |\sphericalangle CAB|$$

7.91. Pokażemy, że w każdym trójkącie jest kąt, który ma co najmniej 60°. Załóżmy przeciwnie, że istnieje trójkąt, w którym każdy kat jest mniejszy niż 60°. Zatem suma kątów wewnętrznych w takim trójkącie byłaby mniejsza niż $3 \cdot 60^\circ$, czyli mniejsza niż 180°, co jest sprzeczne z twierdzeniem o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie. Tak więc w każdym trójkącie jest kąt, który ma co najmniej 60°.

7.92. nie



W dowolnym trójkącie ABC przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok. Wówczas mamy:

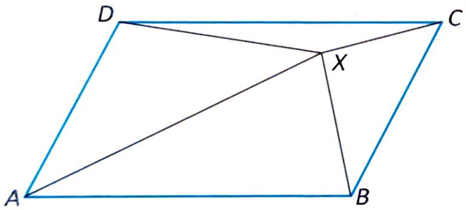
$$\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1 = 360^\circ$$

Z twierdzenia o sumie katów trójkąta otrzymujemy:

$$\alpha + \beta < 180^\circ.$$ Z tego wynika, że
$$\alpha_1 + \beta_1 > 180^\circ$$

7.93. *wskazówka*: Wykaż, że $|\sphericalangle OAD| = |\sphericalangle ODA| = 90^\circ - \alpha$, gdzie $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$.

7.94. Niech dany będzie równoległobok $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu.



Z nierówności trójkąta (zastosowanej do trójkątów ABX oraz CDX) otrzymujemy:

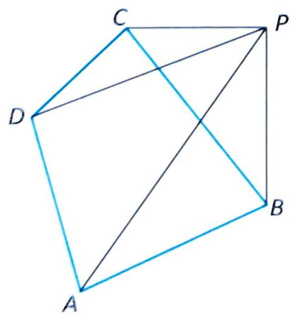
$|AX| < |AB| + |BX|$

$|CD| < |CX| + |DX|$. Ponadto

$|AB| = |CD|$, bo czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Zatem

$|AX| < |AB| + |BX| = |CD| + |BX| < |CX| + |DX| + |BX|$.

7.95. *wskazówka*: Rozważmy dowolny czworokąt $ABCD$ i punkt P. Rozpatrujemy trzy przypadki: 1) punkt P nie należy do brzegu czworokąta $ABCD$, 2) punkt P należy do brzegu czworokąta $ABCD$, ale nie jest wierzchołkiem tego czworokąta, 3) punkt P jest jednym z wierzchołków czworokąta $ABCD$.



Rozpatrujemy przypadek 1).

Z nierówności trójkąta wynikają następujące nierówności (wskaż odpowiednie trójkąty):

$|PA| + |PB| > |AB|$

$|PB| + |PC| > |BC|$

$|PC| + |PD| > |CD|$

$|PD| + |PA| > |DA|$

Dodajemy nierówności stronami i otrzymujemy:

$2(|PA| + |PB| + |PC| + |PD|) > |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$, czyli

$$|PA| + |PB| + |PC| + |PD| > \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|)$$

Rozpatrz pozostałe dwa przypadki.

Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

7.96. a) $\sqrt{21}$ b) 12

7.97. a) $a = 21$ b) $a = 5\sqrt{5}$, $b = 19$

7.98. o 1,8 km

7.99. 21 cali

7.100. $2\sqrt{2}$ cm

7.101. 120 cm

7.102. 15 cm, 17 cm

7.103. 2 cm, $3\frac{3}{4}$ cm, $4\frac{1}{4}$ cm

7.104. a) nie b) tak c) tak d) nie

7.105. tak

7.107. a) ostrokątny b) rozwartokątny c) prostokątny d) rozwartokątny

7.108. a) prostokątny b) rozwartokątny c) prostokątny d) ostrokątny

Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie

7.109. 3 cm

7.110. a) 4 b) $6\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{3}$ d) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

7.111. $4-2\sqrt{3}$

7.112. $2+\sqrt{2}$

7.113. 9 cm, 16 cm

7.114. a) 10 cm b) 0,5 dm c) $\sqrt{6}$ cm d) 7 dm

7.115. 12 cm, 10 cm, 10 cm

7.116. $60°$, $30°$, $90°$

7.117. $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$

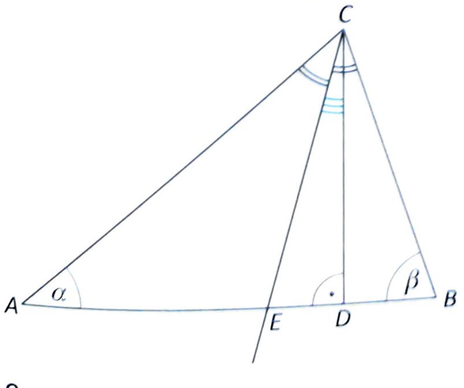
7.118. 0,2 cm

7.119. $6\frac{2}{3}$ cm

7.120. 12 cm, $\frac{3}{2}\sqrt{41}$ cm, $\frac{3}{2}\sqrt{41}$ cm

7.121. 64 cm

7.126. Rozważmy przypadek, gdy kąt B jest kątem ostrym (zobacz rys. poniżej).



$\overrightarrow{CE}$ – dwusieczna kąta ACB

$$|\sphericalangle ACE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\left[180° - (\alpha + \beta)\right] =$$

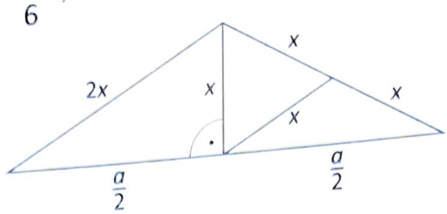
$$= 90° - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle ACD| - |\sphericalangle ACE| =$$

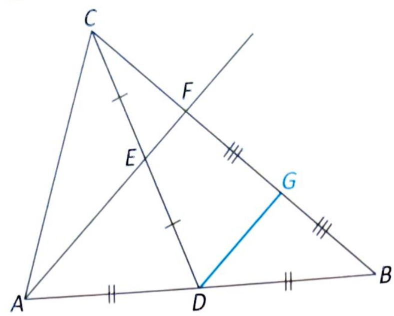
$$= (90° - \alpha) - \left(90° - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

7.127. 9 cm

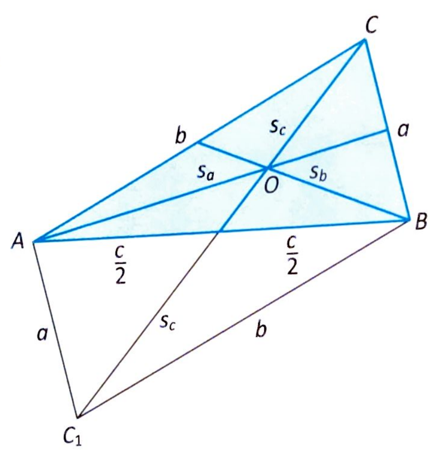
7.128. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; *wskazówka*: Niech x oznacza wysokość opuszczoną na podstawę. Zauważ, że wtedy ramiona trójkąta mają długość $2x$.



7.129. $\frac{1}{2}$; *wskazówka*: Poprowadź odcinek DG łączący środki odcinków AB i FB. Następnie zastosuj twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i wykaż, że $AF \parallel DG$. Na koniec zastosuj twierdzenie Talesa dla kąta DCB przeciętego prostymi równoległymi AF i DG i wykaż, że $|CF| = |FG|$.



7.130.

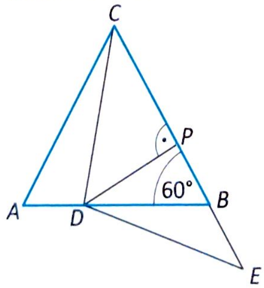


wskazówka: Aby udowodnić nierówność $s_a + s_b + s_c < a + b + c$ wykaż najpierw, że $2s_c < a + b$ (zobacz trójkąt AC_1C na rysunku obok) oraz, analogicznie, że $2s_a < b + c$ i $2s_b < a + c$.
Aby udowodnić nierówność $\frac{3(a+b+c)}{4} < s_a + s_b + s_c$ rozważ trójkąty ABO, BCO i CAO i zauważ, że $c < \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_b$, $a < \frac{2}{3}s_b + \frac{2}{3}s_c$ oraz $b < \frac{2}{3}s_a + \frac{2}{3}s_c$.

Przystawanie trójkątów

7.131. a) tak b) nie c) tak d) tak

7.141. *wskazówka*:

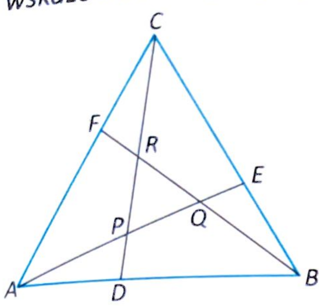


Niech odcinek DP będzie wysokością trójkąta CDE. Wówczas $|DB| = 2|PB|$. Wykaż, że $\Delta DEP \equiv \Delta DCP$.

7.142. *wskazówka*: Wykaż, że $\Delta AED \equiv \Delta BFE \equiv \Delta CDF$. Dla dowodu drugiej części wystarczy pokazać, że np. ΔAED jest prostokątny. W tym celu zauważ, że $|\sphericalangle DAE| = 60°$, $2|AE| = |AD|$, i poprowadź środkową z wierzchołka E.

7.143. *wskazówka* do a): Wyznacz kąty trójkąta PQR. b) $\sqrt{3}$

7.144. *wskazówka*: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Aby udowodnić, że trójkąt *PQR* jest równoboczny, wykaż najpierw, że przystające są trójkąty: *ABE*, *BCF* i *CAD*. Następnie wykaż, że przystające są trójkąty: *ADP*, *BEQ* i *CFR*.

Podobieństwo trójkątów

7.145. trójkąty podobne: a), b), d), f)

7.147. a) 2 b) $\frac{3}{2}$ c) 4 d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{5}{3}$ f) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; *wskazówka*: $|CB| = \sqrt{|AB| \cdot |BD|}$

7.148. a) 4 b) $4\frac{1}{5}$ c) 3 d) $3\frac{1}{3}$

7.149. $|C_1A_1| = 22$ cm, $|C_1B_1| = 120$ cm

7.150. $|AB| = 2{,}5$ cm; $|AC| = 3$ cm; $|BC| = 3{,}5$ cm

Podobieństwo trójkątów – zastosowanie w zadaniach

7.151. a) $k = \frac{1}{5}$ b) $|A_1B_1| = 1{,}6$ cm; $|B_1C_1| = 2$ cm; $|A_1C_1| = 2{,}4$ cm

7.152. a) $\frac{3}{2}$ b) $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 6$ cm

7.153. a) $s = 2{,}5$ b) o 150%

7.154. 14 cm

7.155. $|CE| = 16$ cm, $|AD| = 34$ cm

7.156. $26\frac{2}{3}$ cm

7.157. 2 cm, 5 cm

7.158. 4,8 cm; 11,2 cm

7.159. 16 cm

7.160. $|CD| = 4$; $|DB| = 6{,}4$

7.161. 5 cm, $6\frac{2}{3}$ cm, $8\frac{1}{3}$ cm

7.162. 13

7.163. $4\frac{8}{13}$ cm

7.164. 2 : 3

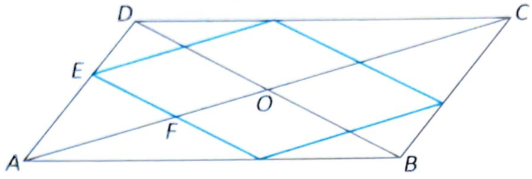
7.165. 12 cm

7.166. 4 cm

7.167. $4\frac{4}{9}$ cm

7.168. b) $\frac{3}{5}$

7.169. *wskazówka*: Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku poniżej oraz



$|AC| = a$, $|BD| = b$. Oznacz przez x długość boku rombu i wykaż najpierw, że przekątne równoległoboku dzielą boki rombu na połowy. Następnie wykorzystaj podobieństwo trójkątów, np. ΔAFE i ΔAOD.

7.170. $10\frac{2}{3}$

7.171. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-12+8\sqrt{3}$

Wektor na płaszczyźnie

7.174. a) tak b) nie

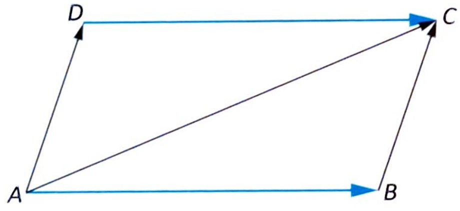
7.175. $\overrightarrow{AE} = 2\vec{b} + 3\vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = 6\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b} - 3\vec{a}$

7.176. $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = 2(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CF} = -2\vec{a}$

wskazówka: wyraź najpierw wektor $\overrightarrow{FC}$ w zależności od wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

7.179. $|KL| = 0{,}6|AB|$

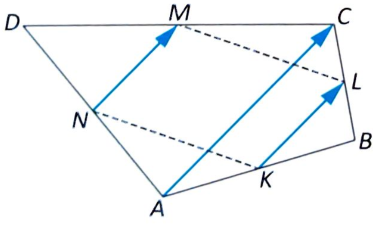
7.180. *wskazówka*: Wystarczy pokazać, że jeśli $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, to $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



W tym celu zauważ, że $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

i $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$

7.181. *wskazówka:*



Niech punkty K, L, M, N oznaczają środki boków czworokąta $ABCD$, jak na rysunku obok. Wystarczy na przykład pokazać, że $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

i skorzystać z poprzedniego zadania.

7.182. *wskazówka*: Wykaż, że $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

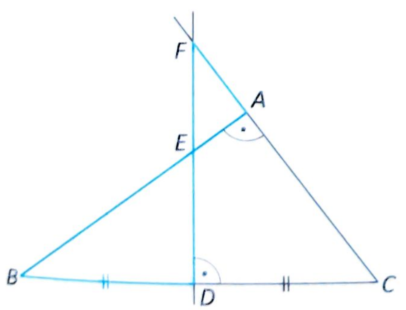
Test sprawdzający do rozdziału 7.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**D**	**D**	**B**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**C**	**C**	**A**	**C**	**C**	**B**	**A**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 7.

16. $48°, 48°, 84°$

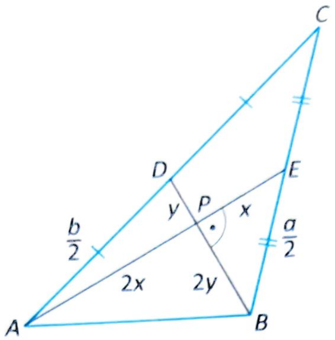
17. $36^\circ, 36^\circ, 144^\circ, 144^\circ$
18. 3 cm; 5 cm; 6,25 cm
19. $|AB| = 12$ dm
20. 140°
21. *wskazówka*: Wykaż, że największy kąt tego sześciokąta ma 192°.
22. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$
24. 7, 7, 3 lub 11, 9, 11, lub $\frac{29}{3}, \frac{25}{3}, \frac{25}{3}$
25. a) 4, 5, 6 b) 3
26. $|AC| = 80$ cm, $|AB| = |BC| = 60$ cm
27. 3
28. *wskazówka:* Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków w trójkącie.
29. a) 36 cm b) 5 cm
30. $3\sqrt{10}$ cm
33. *wskazówka*: Wykaż, że trójkąty *AWM* i *WBN* są równoramienne. W tym celu skorzystaj z twierdzenia o dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.
34. a) *wskazówka*: Skorzystaj z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.
b) *wskazówka*: Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczamy brakujące długości boków w drugim trójkącie: 6 cm i 10 cm. Następnie korzystamy z cechy (bbb) lub (bkb) podobieństwa trójkątów. c) $\frac{4}{5}$
35. $L_{A_1B_1C_1} = 4$ cm, $L_{ABC} = 16$ cm
36. $\frac{4}{3}$
37. $|AC| = 6\sqrt{13}$ cm
38. a) $|DB| = 20$ cm b) $4\sqrt{5}$ cm, $8\sqrt{5}$ cm
39. $\frac{15}{7}$



wskazówka: Skorzystaj z cechy (kkk) podobieństwa trójkątów i wykaż, że trójkąty *ABC*, *EBD* i *AFE* są podobne. Na podstawie podobieństwa trójkątów *EBD* i *ABC* wyznacz długości odcinków *EB* i *ED*.

40. *wskazówka*: Wykorzystaj własność środkowych w trójkącie oraz wykaż, że $2|A_1B_1| = |AB|$, $2|KL| = |AB|$ (zastosuj twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie).
41. $51^\circ, 51^\circ, 129^\circ, 129^\circ$
wskazówka: Wykaż, że krótsza podstawa i ramiona trapezu są równej długości.

43.



wskazówka:
Niech punkty D i E oznaczają odpowiednio środki boków AC i BC. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach APD i PBE otrzymujemy: $4x^2+y^2=\frac{b^2}{4}$ oraz $x^2+4y^2=\frac{a^2}{4}$. Po dodaniu równań stronami mamy: $5x^2+5y^2=\frac{a^2+b^2}{4}$, czyli

$$x^2+y^2=\frac{a^2+b^2}{20}.$$

Analogicznie w trójkącie ABP zachodzi równość: $|AB|^2=4x^2+4y^2$. Zatem

$$|AB|^2=4(x^2+y^2)=4\cdot\frac{a^2+b^2}{20}=\frac{a^2+b^2}{5}.$$

44. *wskazówka*: Niech M oznacza punkt przecięcia prostej CD z prostą A_1B_1. Wykaż, że $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C$, a następnie udowodnij, że trójkąty B_1CM i A_1CM są równoramienne.
$\Delta ACD\equiv\Delta AEB$, $\Delta BOD\equiv\Delta CEO$, $\Delta ACO\equiv\Delta AOB$.
45. *wskazówka*: Wykaż kolejno, że
46. *wskazówka*: Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami przekątnych AC i BD.
Wówczas prawdziwe są równości: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ oraz $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$.

Wykaż, że $\overrightarrow{MN}=\frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}}{2}$ i skorzystaj z własności wektorów równoległych.

8. Trygonometria kąta ostrego

Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym

8.1. a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{1}{3}$

b) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\frac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$

c) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{7}{8}$

d) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt5}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt5}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt5}{2}$

e) $\sin\alpha=\frac{\sqrt2}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt2}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\operatorname{ctg}\alpha=1$

f) $\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt3$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt3}{3}$

8.2. a) 8,9 cm b) 14,1 cm c) 9,1 cm d) 6,1 cm e) 4,4 cm f) 13,2 cm
8.3. a) 3,2 cm b) 12,9 cm c) 3,3 cm
8.4. a) $h_1\approx 8{,}7$ cm, $h_2\approx 9{,}7$ cm, $h_3\approx 11{,}8$ cm b) $h_1\approx 9{,}4$ cm, $h_2=h_3\approx 8{,}8$ cm
c) $h_1\approx 7{,}7$ cm, $h_2\approx 9{,}4$ cm, $h_3\approx 21{,}1$ cm

8.5. a) $1\frac{4}{5}$ b) $1\frac{4}{5}$

8.6. a) $1\frac{48}{49}$ b) $\frac{40+8\sqrt{21}}{21}$

8.7. a) $3+2\sqrt{2}$ b) 6

8.8. $\frac{7}{18}$

8.11. a) 7,5 cm; 8,5 cm b) 24 cm, 26 cm c) 7 cm, $7\sqrt{2}$ cm d) $6\sqrt{3}$ cm, 12 cm

8.12. a) 30 cm, 50 cm b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm, $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm c) 1,6 cm; 3,4 cm d) $\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm

8.13. a) 25,2 cm b) $\frac{2+8\sqrt{3}}{3}$ cm c) 20 cm d) $16\sqrt{2}$ cm

8.14. 19,9 cm
8.15. ok. 43,6 m
8.16. ok. 31°
8.17. ok. 89 m
8.18. ok. 42 m
8.19. $h(1+\text{ctg}\,\beta\cdot\text{tg}\,\alpha)$
8.20. a) $\sin 20° < \sin 51°$ b) $\cos 15° > \cos 62°$ c) $\text{ctg}\,75° < \text{ctg}\,27°$ d) $\text{tg}\,26° < \text{tg}\,29°$ e) $\text{tg}\,18° > \sin 18°$, *wskazówka*: Narysuj kąt 18° w trójkącie prostokątnym i zauważ, że przyprostokątne są krótsze od przeciwprostokątnej. f) $\cos 80° < \text{ctg}\,80°$
8.22. a) ok. 23,5 cm^2 b) ok. 63,6 cm^2
8.23. a) ok. 49° b) ok. 20°
8.24. $F = 52$ N, $\alpha_1 \approx 67°$, $\alpha_2 \approx 23°$
8.25. 23791 J; *wskazówka*: $W = F\cdot s\cdot\cos\alpha$
8.26. a) 3958 km b) 777 km
8.27. o godzinie $13^{\underline{49}}$
8.28. $v = \frac{h(\text{ctg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta - 1)}{t}$

Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów 30°, 45° i 60°

8.29. a) 0,25 b) 3 c) $2\sqrt{3}$ d) 1 e) $30-5\sqrt{3}$ f) $\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

8.30. a) −0,25 b) 1,5 c) 2 d) $-3{,}25+\sqrt{3}$ e) $7+4\sqrt{3}$ f) $\frac{2\sqrt{6}-5}{3}$

8.31. a) $(10+10\sqrt{3})$ cm b) $(3+3\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ cm c) $(18+6\sqrt{3}+6\sqrt{2})$ cm

8.32. a) $(16+16\sqrt{3})$ cm b) $(9+3\sqrt{2}+3\sqrt{3})$ cm c) $(1+\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ cm

8.33. a) 45° b) 60° c) 30° d) 30°
8.34. a) 30°, 45°, 105° b) 60°, 60°, 60° c) 45°, 60°, 75° d) 45°, 45°, 90°
8.35. a) $\alpha = 45°, \beta = 45°$ b) $\alpha = 60°, \beta = 30°$ c) $\alpha = 60°, \beta = 45°$ d) $\alpha = \beta = 30°$
8.36. a) $14\sqrt{3}$ cm^2 b) $3\sqrt{2}$ cm^2

8.37. a) $\sin\alpha \in \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ b) $\sin\alpha \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ c) $\cos\alpha \in \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right)$ d) $\cos\alpha \in \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

e) $\operatorname{tg}\alpha \in \left\langle 1, \sqrt{3} \right)$ f) $\operatorname{tg}\alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right)$ g) $\operatorname{ctg}\alpha \in \langle 1, +\infty)$ h) $\operatorname{ctg}\alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right)$

8.38. *wskazówka*: Niech $|AC| = x$. Korzystając z funkcji trygonometrycznych kątów 30° i 60° zapisz długości boków AD, DB i CB w zależności od x.

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego.

8.39. a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{1}{3}$ b) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$

c) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 3\frac{3}{7}$ d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{\sqrt{11}}$

8.40. a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{9}{16}$

8.41. a) $-\frac{1}{25}$ b) $-\frac{23}{25}$

8.42. a) $6\frac{1}{4}$ b) $1\frac{1}{2}$

8.43. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{9}$

8.44. a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 3 d) $-\frac{2}{9}$

8.45. a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$ b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2\frac{2}{5}$

c) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$ d) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

8.46. a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{15}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$

c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ $\operatorname{ctg}\alpha = 3$

d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ $\cos\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$

8.47. a) $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$ b) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ d) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

8.48. a) nie; *wskazówka*: Sprawdź, czy jest spełniona „jedynka trygonometryczna”.
b) tak c) tak d) nie

8.50. a) 1 b) 1 c) 0 d) 2 e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\sqrt{3}$

8.52. a) $\sin 40^\circ < \sin 45^\circ < \cos 40^\circ$ b) $\cos 30^\circ < \sin 65^\circ < \cos 20^\circ$
c) $\text{ctg}\, 46^\circ < \text{tg}\, 45^\circ < \text{tg}\, 46^\circ$ d) $\cos 50^\circ < \sin 50^\circ < \text{tg}\, 50^\circ$

8.53. a) $1\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 4 d) $\frac{7}{8}$

8.54. a) $\frac{9}{32}$ b) $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, *wskazówka*: Jeśli $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$, to $\cos\alpha < \sin\alpha$, stąd

$\cos\alpha - \sin\alpha < 0$. c) $\frac{5\sqrt{7}}{16}$ d) $-\frac{10\sqrt{7}}{9}$

8.55. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

8.56. a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) $\frac{1}{\cos\alpha}$ d) $\sin\alpha$ e) $\frac{1}{\cos\alpha}$ f) $\frac{1}{\sin\alpha}$ g) 1 h) $\frac{1}{\sin\alpha}$

8.60. *wskazówka*: Wystarczy wskazać kąt, który nie spełnia danej równości.

Test sprawdzający do rozdziału 8.

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8
Odpowiedź	**B**	**A**	**C**	**D**	**D**	**B**	**C**	**A**
Nr zadania	9	10	11	12	13	14	15	
Odpowiedź	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**	**C**	**D**	

Zadania powtórzeniowe do rozdziału 8.

16. a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{3}$

18. $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$

19. 28,9 cm

20. ok. 13°

21. a) $-\frac{1}{4}$ b) 4

22. $5\sqrt{3}$

23. $\text{ctg}\,\alpha = \frac{4}{5}$ $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$ $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$

24. a) $\frac{1}{2}$ b) 1

25. a) $4\sqrt{2} - 6$ b) $3\sqrt{2} - 4$

26. a) tak b) nie

27. a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) $\sqrt{3}$

28. $9\frac{1}{9}$

29. $\frac{31}{32}$

30. $\frac{1}{4}$

31. $3\frac{1}{3}$

32. a) $\sin\alpha \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ b) $\cos\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ c) $\operatorname{tg}\alpha \in \left\langle\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right\rangle$ d) $\operatorname{ctg}\alpha \in \left\langle 1, \sqrt{3}\right)$